ELEMENTOS DE LA TEORÍA COMBINATORIA

La Teoría Combinatoria es un área de la Matemática en la que se resuelven problemas de conteo sin enumerar todos los casos posibles.
Trata con el número de maneras de arreglar o escoger objetos de un conjunto finito de acuerdo a condiciones específicas.

Regla del Producto

∗ Si una actividad puede realizarse en *t* pasos sucesivos y el paso 1 puede realizarse de n_1 formas; el paso 2 de n_2 formas;…; y el paso *t* de n_t formas, entonces el número de actividades posibles es $n_1 \cdot n_2 \cdots n_t$.

Regla de la Suma

∗ Si *t* actividades se pueden realizar de $n_1, n_2, ..., n_t$ y si todas son disjuntas, es decir no es posible realizarlas simultáneamente, entonces cualquiera de las *t* actividades puede realizarse en $n_1 + n_2 + \cdots + n_t$ formas.

Ejemplo 1.
En el restaurante *Mi comida*, para el almuerzo se puede escoger entre tres platos principales: arroz con pollo, sancocho, o tamal y dos bebidas: naranja o piña. ¿Cuántas opciones de almuerzo tenemos?
Solución:
El primer paso consiste en elegir el plato principal y el segundo paso, elegir la bebida. Existen 3×2 = 6 comidas. Veamos cuáles son:

Arroz con Pollo	↗	Arroz con pollo y bebida de naranja
	↘	Arroz con pollo y bebida de piña
Sancocho	↗	Sancocho y bebida de naranja
	↘	Sancocho y bebida de piña
Tamal	↗	Tamal y bebida de naranja
	↘	Tamal y bebida de piña

Ejemplo 2.
¿Cuántos números de cuatro dígitos se pueden formar con los dígitos 1, 2, 3, 4, 5 y 6, si no se permite las repeticiones?
Solución:
Aplicando la Regla del Producto, el primer dígito puede elegirse de 6 maneras, el segundo, de 5 maneras, el tercero, de 4 maneras y el cuarto dígito de 3 maneras.

$$6\times5\times4\times3=360 \text{ números.}$$

Ejemplo 3.
¿Cuántos números pares de cuatro dígitos se pueden formar con los dígitos 1, 2, 3, 4, 5 y 6 , si no se permite las repeticiones?
Solución:
Aplicando la Regla de la Suma, si el número debe ser par, el dígito de las unidades debe ser 2, 4 o 6. Por lo tanto el dígito de las unidades se puede escoger de 3 maneras. Para cada una de esas maneras, los tres espacios restantes se escogen de los 5 números restantes. Así, hay

$$5\times4\times3\times3=180 \text{ números pares.}$$

Permutaciones y Combinaciones

∗ Un arreglo ordenado de r elementos de un conjunto que contiene n elementos distintos con $r\leq n$, se denomina r-permutación de n elementos. El número de tales arreglos se denota $P(n, r)$.

∗ Una selección no ordenada de r elementos de un conjunto que contiene n elementos distintos con $r\leq n$, se denomina r-combinación de n elementos. El número de tales selecciones se denota $C(n, r)$ ó $\binom{n}{r}$.

Valores de $P(n, r)$ y $C(n, r)$

∗ Para el número de r-permutación de n elementos.

De un conjunto de n elementos, el primer elemento puede escogerse de n maneras, el segundo elemento de la permutación puede elegirse de (n -1) maneras pues hay n -1 elementos que quedan en el conjunto. Hay (n -2) maneras de elegir el tercer elemento, y así sucesivamente. Por último, para elegir el elemento r hay $n-(r-1)=n-r+1$. Y por la regla del producto:

$$P(r,n)=n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)\,.$$

En particular, $P(n,n)=n!$.

!	Recuerda que el **símbolo factorial, !,** significa que se multiplican los números desde n hasta 1. Así • 1! = 1 • 4! = 4 × 3 × 2 × 1 = 24 • 5! = 5 × 4 × 3 × 2 × 1 = 120
Estaremos de acuerdo que **0! = 1**.	

∗ Para las r-combinaciones de n elementos.

Las r-permutaciones de un conjunto de n elementos se obtiene formando primero las $C(n, r)$ r-combinaciones de un conjunto de n elementos y luego ordenando los elementos de cada r-combinación, lo cual puede realizarse de P(r, r) maneras. Por lo tanto,

$$P(n,r)=C(n,r)\cdot P(r,r)\,.$$

De donde se deduce que,

$$C(n,r)=\frac{P(n,r)}{P(r,r)}=\frac{n!}{r!(n-r)!}\,.$$

✐ Toma nota	
En las Permutaciones	importa el orden
En las Combinaciones	no importa el orden

Ejemplo 4.

¿De cuántas maneras se pueden formar cuatro niños y seis niñas en la fila?

Solución:

En total son diez niños que deben ordenarse en la fila, luego existen $P(10,10)=10!$ maneras.

Ejemplo 5.

¿De cuántas maneras se pueden formar cuatro niños y seis niñas en la fila, si las niños deben ir juntos y los niñas también?

Solución:

Los niños se ordenan y se pueden considerar como un bloque y las niñas también se ordenan como otro bloque. Los bloques se puede ordenar de 2! maneras. Además, los niños se ordenan de 4! maneras y las niñas, de 6! maneras. Por la regla del producto, la respuesta sería:

$$2\times 4!\times 6! = 34\,560.$$

Ejemplo 6.

¿De cuántas maneras se pueden formar cuatro niños y seis niñas en la fila, si los niños deben ir juntos?

Solución:

Los niños se consideran como un bloque, luego hay que ordenar siete objetos (seis niñas y el bloque de los niños) que se ordenan de 7! maneras y los niños se ordenan de 4! maneras. Por lo tanto el número requerido es: $7!\times 4!=120\,960$.

Ejemplo 7.

Se tiene un club formado por seis hombres y cinco mujeres. ¿De cuántas maneras se puede seleccionar un comité de cuatro personas?

Solución:

Como en un comité no interesa el orden, la respuesta es:

$$C(11,4)=\frac{11!}{4!\cdot 7!}=\frac{11\cdot 10\cdot 9\cdot 8}{4!}=330.$$

Ejemplo 8.

Se tiene un club formado por seis hombres y cinco mujeres. ¿De cuántas maneras se puede seleccionar un comité de cuatro personas que contenga a lo sumo dos hombre?

Solución:

El comité puede contener dos hombres, un hombre o ningún hombre. Dos hombres pueden escogerse de $C(6,2)$ maneras y las mujeres del comité pueden escogerse de $C(5,2)$ maneras. Si se requiere un hombre, éste puede elegirse de $C(6,1)$ maneras y las mujeres de ese comité de $C(5,3)$ formas. Si el comité contiene sólo mujeres, existen $C(5,4)$ formas de elegirlas. Aplicando la regla del producto y de la suma se obtiene el número total de comités,

$$C(6,2)\cdot C(5,2)+C(6,1)\cdot C(5,3)+C(5,4)=215.$$

Ejemplo 9.
Se tiene un club formado por seis hombres y siete mujeres. ¿De cuántas maneras se puede seleccionar un comité de cuatro personas manera que Mari y Juan no queden juntos?
Solución:
Dentro del comité no se quiere a Mari y a Juan, por lo que calculamos:
(número de los comités)- (número de comités donde estén Mari y Juan). Esto es,

$$C(11,4)-C(9,2)=294.$$

Permutaciones y Combinaciones con repetición

∗ Si se permite repetición de los elementos de un conjunto que contiene n elementos, entonces el número de r-permutaciones es n^r.

∗ Dado un conjunto de n elementos que incluye n_1 objetos idénticos del tipo 1, n_2 objetos idénticos del tipo 2,… y n_t objetos idénticos del tipo t, tales que $n_1+n_2+\cdots+n_t = n$ el número de las diferentes permutaciones del conjunto es igual a

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_t!}.$$

∗ El número de r-combinaciones de n tipos de objetos permitiendo repeticiones de los objetos, es

$$C(n+r\text{-}1,\ r).$$

Ejemplo 10.
¿De cuántas maneras podría un estudiante responder a una prueba de cierto y falso que contiene diez preguntas?
Solución:
Como se repetirá C o F en sus respuestas, existen 2^{10} maneras posibles de responder.

Ejemplo 11.
¿Cuántos arreglos pueden hacerse con las letras de la palabra CARRETERA?
Solución:
Existen 2 letras A, 3 letras R, 2 letras E, 1 letra C y 1 letra T. Luego se tendrán

$$\frac{9!}{2!\cdot 3!\cdot 2!}=15120 \text{ arreglos.}$$

Si lo hiciéramos por combinaciones, pensaríamos en 9 espacios que debemos llenar con las letras dadas. Dos de esos espacios van a llenarse con las 2 letras A de $C(9, 2)$ maneras, tres de los 7 espacios restantes, se llenarán con las 3 letras R de $C(7,3)$ maneras. Dos de los 4 espacios restantes se llenarán con las 2 letras E de $C(4,2)$ maneras y para ubicar la letra C escogemos uno de los dos espacios restantes de $C(2,1)$ maneras. El espacio que queda será para ubicar la letra T.

En total tenemos:

$$C(9,2)\times C(7,3)\times C(4,2)\times C(2,1)=\frac{9!}{2!\cdot 7!}\cdot\frac{7!}{3!\cdot 4!}\cdot\frac{4!}{2!\cdot 2!}\cdot\frac{2!}{1!\cdot 1!}=\frac{9!}{2!\cdot 3!\cdot 2!}$$

Ejemplo 12.

¿De cuántas maneras se pueden repartir siete libros distintos entre Ana, Ben y Carlos, si Ana y Carlos deben recibir dos libros cada uno ?

Solución:

Si colocamos los siete libros en un determinado orden, sólo tendremos que ordenar las letras A, B, C de lo nombres de cada uno, para saber a quién le daremos el determinado libro. Una ordenación sería A A C B B B C. Luego a Ana le toca el libro 1y 2, a Ben el libro 4,5 y 6 y a Carlos el libro 3y 7. El número total de ordenaciones sería:

$$\frac{7!}{2!\cdot 3!\cdot 2!}=210\,.$$

Ejemplo 13.

Hay 3 montones de pelotas rojas, azules y verdes idénticas, cada montón contiene al menos diez pelotas.

a) ¿De cuántas maneras se pueden elegir las diez pelotas?

b) ¿De cuántas maneras se pueden elegir las diez pelotas si se debe elegir exactamente una pelota roja?

c) ¿De cuántas maneras se pueden elegir las diez pelotas si se debe elegir al menos una pelota roja?

d) ¿De cuántas maneras se pueden elegir las diez pelotas si se debe elegir a lo sumo una pelota roja?

Solución:

a) Hay n=3 tipos de pelotas y r=10 pelotas para escoger con repetición. El número de maneras de hacer la selección es

$$C(n+r\text{-}1,\ r) = C(12,10) = 66.$$

b) Se toma una pelota roja y se separa. Nos queda por seleccionar 9 pelotas de los 2 tipos restantes, azules y verdes, e incluir la bola roja separada, en cada selección. Se tendrán

$$C(n+r\text{-}1,\ r) = C(2+9-1,9) = C(10,9) = 10.$$

c) Se toma una pelota roja y se separa. Nos queda por seleccionar 9 pelotas de los 3 tipos e incluir la bola roja separada, en cada selección. Se tendrán

$$C(n+r\text{-}1,\ r) = C(11,9) = 55.$$

d) Las selecciones no contendrán pelotas rojas o contendrá exactamente una pelota roja. Luego el número de selecciones será:

$$C(2+10-1,10) + C(2+9-1,9) = 11 + 10 =21.$$

Toma nota		
	Sin repetición	Con repetición
Permutaciones	de r elementos tomados de n $P(r,n)=n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$	de n elementos en los que hay n_1 objetos idénticos del tipo 1, n_2 objetos idénticos del tipo 2,… y n_t objetos idénticos del tipo t $\dfrac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_t!}$
Combinaciones	de r elementos tomados de n $C(n,r)=\dfrac{n!}{r!(n-r)!}$	de r elementos tomados de n tipos de objetos permitiendo repeticiones de los objetos $C(n+r-1, r)$

Ejercicios

1. ¿Cuántos números de cinco cifras distintas se pueden formar con las cifras impares? ¿Cuántos de ellos son mayores de 70 000?
2. Con nueve alumnos de una clase se desea formar tres equipos de tres alumnos cada uno.¿De cuántas maneras puede hacerse?
3. Una mesa presidencial está formada por ocho personas, ¿de cuántas formas distintas se pueden sentar, si el presidente y el secretario siempre van juntos?
4. Pancho olvidó los cuatro números de su tarjeta CLAVE. Recuerda que no contiene cifras repetidas, que las tres primeras cifras están, en algún orden, en su número de cédula y que la cuarta cifra no está en su número de cédula. El número de cédula de Pancho es 2- 712-7887. ¿Cuántos son los posibles números de la tarjeta de Pancho?
5. Encontrar cuántos números pares de tres cifras se forman sin repetir las cifras.
6. El concurso SUERTE consiste en escoger 6 números del conjunto $\{1, 2, 3,\ldots,44\}$. La persona que adivina los 6 números ganadores sin importar su orden, obtiene un premio millonario.
   a) ¿Cuántas combinaciones de 6 números se pueden escoger?
   b) Madame Lulú dio predicciones para los próximos concursos de SUERTE. Dijo que para esta semana saldrán 3 números pares y 3 impares. Mientras que para la próxima semana dos números estarán entre 1,2,…,15; dos estarán entre el 16,17,…,30 y dos entre 31,32,…,44. ¿En cuál de las dos predicciones invertimos menos dinero si jugamos a todas las posibilidades?
7. Se lanza diez veces una moneda y el resultado puede ser cara o sello.
   a) ¿Cuántos resultados son posibles?
   b) ¿Cuántos resultados contienen exactamente dos caras?
   c) ¿Cuántos resultados contienen a lo sumo tres sellos?
8. Encuentre el número de maneras como se pueden repartir 9 juguetes iguales entre 4 niños si el menor debe recibir 3 juguetes y los otros, 2 juguetes.
9. a) ¿Dé cuántas maneras se pueden ordenar 2 libros de arte, 5 de latín y 3 de ciencias en la repisa de un armario?
   b) ¿De cuántas maneras se pueden escoger cuatro libros de la repisa si a lo sumo debo tener uno de latín? (asuma que todos los libros son diferentes)
   c) ¿De cuántas maneras se pueden escoger dos libros de la repisa si a lo sumo debo tener uno de latín? (asuma que los libros de cada materia son iguales)
10. En la panadería *El Confite* hay bandejas de galletas de vainilla, coco y fresa. Al menos hay 6 galletas de cada tipo en las bandejas. ¿Cuántas selecciones diferentes pueden hacerse al comprar 6 galletas? ¿Cuántas selecciones diferentes pueden hacerse al comprar 6 galletas si se desea exactamente dos de fresa?

Referencias Bibliográficas

[1] García, C.; López, J. *Matemática Discreta Problema y Ejercicios Resueltos.* Prentice Hall, 2002

[2] Veerarajan, T. *Matemáticas Discretas con teoría de gráficas y combinatoria.* Mc Graw Hill, 2008

[3] Johnsonbaugh R. *Matemáticas Discretas cuarta edición.* Prentice Hall, 1997