☙ TEMAS DE ÁLGEBRA ❧

☙ Exponentes

Por definición la notación a^n con n entero positivo y a número real, significa el producto de a por sí mismo n veces. Esta definición se puede extender para valores racionales de n:

- Para todos los enteros m y enteros positivos n para los cuales $a^{1/n}$ existe,

$$a^{m/n} = \left(a^{1/n}\right)^m .$$

Algunos de problemas que involucran exponentes pueden parecer algo complicados pero es posible convertirlos a una expresión sencilla usando las propiedades que detallamos a continuación.

Propiedades

- Sean x e y números racionales. Los siguientes resultados son válidos para todos los números reales a y b para los cuales la potencia indicada exista y no se tengan denominadores cero.

$a^0 = 1$	$a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$
$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$	$(a^x)^y = a^{xy}$
$\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$	$\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$
$(ab)^x = a^x b^x$	

Equivalentemente, usando la notación de radicales:

- Para todos los números reales a y b y enteros positivos m y n para los cuales la raíz indicada exista:

$\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$	$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$
$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$	$\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

Al trabajar con exponentes y radicales debes tomar en cuenta las siguientes situaciones especiales.

- Si $a = 0$ y $n \neq 0$ definimos $a^n = 0$. Sin embargo, cuando *a* y *n* son ambos cero, diremos que a^n no está definida.
- Si $a < 0$, no siempre a^n es un número real. Si *n* es un número entero, a^n es siempre un número real. Pero para *n* racional no entero, a^n será un número real dependiendo del valor del denominador de *n*. De manera más clara, si $n = p/q$ con *p* y *q* enteros no nulos sin factores comunes o sea, primos relativos, entonces,

$$a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p} = \left(\sqrt[q]{a}\right)^p \text{ , está definida si } q \text{ es impar.}$$

Pero si q es par, $a^{p/q}$ no está definida.

Ejemplo: $(-8)^{2/3} = (\sqrt[3]{-8})^2 = (-2)^2 = 4$, pero $(-8)^{3/2}$ no se considera como número real pues la raíz cuadrada de un número negativo no está definida.

Toma nota: Debes tener cuidado con la notación

$$a^{b^c} = a^{(b)^c}.$$

Mira el siguiente ejemplo:

$$2^{3^4} = 2^{(3)^4} = 2^{81},$$

lo que es diferente a $(2^3)^4 = 2^{3\times4} = 2^{12}$.

Ejemplo 1: Al resolver $\sqrt{\dfrac{\sqrt[4]{4\cdot\sqrt{4^2}}}{2^3}}$ se obtiene 1/2.

Ejemplo 2: Si $a^n = 3$, efectuando las operaciones en $\dfrac{(a^n)^2 + (a^3)^n + a^{4n}}{(a\cdot 3^{1/n})^n}$ resulta 13.

Ejemplo 3: Si *a* y *b* son números reales positivos tales que $a^b = b^a$ y $b = 4a$ encuentra el valor de *a*.

Solución: Por las condiciones dadas se tiene,

$$a^{4a} = (4a)^a.$$

Y utilizando las propiedades de los exponentes resulta,

$$(a^3)^a = 4^a \text{ de donde se deduce } a^3 = 4 \text{ y por lo tanto } a = \sqrt[3]{4}.$$

Profesora Lydia Burgoa
Fundación Olimpiada Panameña de Matemática

➰ Valor absoluto

El valor absoluto de *a*, denotado |*a*|, está definido por:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}.$$

Observa que para todo número real *a* se tiene que:

$$\sqrt{a^2} = |a|.$$

Ejemplos: $\sqrt{(7)^2} = |7| = 7$ y $\sqrt{(-4)^2} = |-4| = 4$.

➰ Identidades Algebraicas

Una ecuación se llama identidad si es verdadera para cualquier valor de las variables. Las siguientes identidades son muy útiles al resolver problemas de olimpíadas.

$$\begin{aligned}
(x+y)^2 &= x^2+2xy+y^2 \\
(x-y)^2 &= x^2-2xy+y^2 \\
x^2-y^2 &= (x+y)(x-y) \\
x^3+y^3 &= (x+y)(x^2-xy+y^2) \\
x^3-y^3 &= (x-y)(x^2+xy+y^2).
\end{aligned}$$

Ejemplo: Si $a \times b = 3$ y $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = 5$, entonces el valor de a^2+b^2 es:

a) 231 b) 219 c) 225 d) 163 e) 196

Solución: Sumando, $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{ab} = 5$ luego, $b-a=15.$ Por otro lado, $(b-a)^2 = 15^2 = 225 = b^2+a^2-2ab = b^2+a^2-6.$ Despejando se obtiene que la respuesta correcta es: a) 231.

➰ Ecuación Lineal y Cuadrática

- Una ecuación lineal o de primer grado, de una variable o incógnita, es una ecuación que se puede escribir de la forma $ax+b=0$ con $a \neq 0$.

La solución de la ecuación lineal es el valor de la incógnita que hace verdadera la igualdad. La estrategia básica para resolver una ecuación lineal es despejar la incógnita y el valor que muestre el otro lado de la igualdad, será la solución.

- La ecuación cuadrática o de segundo grado de una variable, de la forma $ax^2+bx+c=0$ con a, b, y c números reales y $a \neq 0$, tiene dos soluciones que están dadas por $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ y $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

La expresión que se encuentra dentro de la raíz, b^2-4ac, se denomina discriminante de la ecuación cuadrática. Si el discriminante es cero, las soluciones son números reales e iguales. Si el discriminante es positivo, las soluciones son números reales, pero si es negativo, diremos que la ecuación cuadrática no posee solución (en el conjunto de los números reales).

Las ecuaciones cuadráticas algunas veces pueden resolverse usando la factorización. En particular, observa que si $x^2+bx+c=(x-p)(x-q)$ entonces se tiene que $b=-(p+q)$ y $c=pq$.

Ejemplo: Para factorizar $x^2+3x-10$ buscarás dos números que sumados den -3 y multiplicados den -10. Luego $x=-5$ y $x=2$ son las soluciones de la ecuación $x^2+3x-10=0$.

໑ Sistema de Ecuaciones Lineales

A menudo en las olimpiadas, se presentan problemas que involucran sistemas de ecuaciones lineales que debes resolver. Resolver un sistema de ecuaciones es hallar el conjunto de valores que satisfacen todas las ecuaciones simultáneamente.

Hay varios métodos para resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, podemos mencionar, igualación, eliminación, sustitución, el método gráfico y la regla de Cramer. Resumiremos algunos de los métodos que has estudiado en tu curso de Álgebra:

- En el método de igualación, despejamos la misma incógnita en ambas ecuaciones y las expresiones despejadas se igualan. Resolvemos para la incógnita que aparece en ellas y sustituimos en cualquiera de las ecuaciones despejadas para encontrar el valor de la otra.
- En el método de eliminación, se multiplicará una o ambas ecuaciones por números que permitan eliminar una variable al sumarlas. El resultado es una ecuación en una variable cuya solución se sustituye en alguna de las ecuaciones originales para encontrar el valor de la otra.
- En el método de sustitución, se despeja una incógnita en una ecuación y este resultado se sustituye en la otra ecuación. Esta última se resuelve para encontrar el valor de la incógnita y se sustituye en la ecuación que se despejó para encontrar el valor de la otra.

Ejemplo: Sean m y n dos números tales que $(2^m)(4^n)=\sqrt{2}$ y $m+3n=2$. Entonces $m \times n$ es igual a: a) $\dfrac{-15}{4}$ b) $\dfrac{55}{4}$ c) $\dfrac{7}{4}$ d) $\dfrac{-21}{4}$ e) $\dfrac{21}{4}$

Solución: Como $2^m 4^n = 2^m(2^2)^n = 2^{m+2n}$ y $\sqrt{2} = 2^{1/2}$, igualando los exponentes y utilizando la ecuación dada, obtenemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} m + 3n = 2 \\ m + 2n = \dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

La solución de este sistema es $m = -\frac{5}{2},\ n = \frac{3}{2}$, por tanto $m \times n = -\frac{15}{4}$.

ꝏ Ejercicios

Hemos reunido unos cuantos problemas que te ayudarán a afianzar los conceptos y los métodos.

Ejercicio 1. Para obtener 8^2 debemos elevar 2^2 a la potencia:

a) 2 b) 3 c) 4 d) 6 e) 8

Ejercicio 2. La expresión $4^4 \cdot 9^4 \cdot 4^9 \cdot 9^9$ se simplifica como:

a) 13^{13} b) 13^{36} c) 36^{13} d) 36^{36} e) 1296^{26}

Ejercicio 3. ¿Cuánto vale *x* si $2(2^{2x}) = 4^x + 64$?

Ejercicio 4. Juan y Aquiles conversaban acerca de su colección de carritos miniatura. Juan le dijo: "si me das cierta cantidad de carritos tendría 6 veces lo que te queda. Pero si yo te doy esa misma cantidad, tú tendrías una tercera parte de lo que me quedaría". ¿Cuál es la cantidad mínima de carritos que tiene Juan?

Ejercicio 5. Tres hermanos conversan acerca de sus edades. El mayor dice: "la suma de nuestras edades dividida por la edad de nuestro hermano menor da 4 como resultado". El otro hermano dice la suma de los cuadrados de las tres edades es igual a 200". El más pequeño dice: "mamá me dijo que tú naciste cuando él tenía dos años". ¿Cuántos años tiene cada hermano?

Ejercicio 6. Una pareja de mellizos y un conjunto de trillizos tienen por edades números enteros, 150 en total. Si las edades de los mellizos se intercambian con la de los trillizos, en total sería 120. ¿Cuántos años tienen los mellizos?

Ejercicio 7. ¿Para cuántos valores enteros de *n*, entre 0 y 50, la expresión $x^2 + x - n$ se factoriza como producto de factores lineales a coeficientes enteros?

a) 7 b) 5 c) 3 d) 1 e) 8

Ejercicio 8. La suma de los cuadrados de cuatro números impares consecutivos es 1044. El producto de los dos números del medio es:

a) 221 b) 143 c) 323 d) 195 e) 255

Ejercicio 9. Si m es un número entero, encuentra la cantidad de raíces enteras de la ecuación: $x^2-2(m+1)x+2m+10=0$.

Ejercicio 10. Suponga que $N>1$. El valor de $\sqrt[3]{N\sqrt[3]{N\sqrt[3]{N}}}$ es:

a) $N^{1/27}$ b) $N^{1/9}$ c) $N^{1/3}$ d) $N^{13/27}$ e) N

Ejercicio 11. Una pintura cuadrada está enmarcada en un cuadro cuyo marco es de 4 cm de ancho. Si el marco representa las ¾ partes del cuadro, en cm^2 el tamaño de la pintura es:

a) $\frac{16}{9}$ b) 4 c) 16 d) 192 e) 64

Ejercicio 12. A la fiesta de cumpleaños de mi abuelo asistieron sus tres amigos y observaron que al sumar sus edades tomadas de tres en tres se obtenía 187, 190, 210 y 220. Si mi abuelo es el mayor, su edad es:

a) 72 b) 76 c) 82 d) 88 e) No se puede determinar

Ejercicio 13. El área de un triángulo es 42 m^2. Si la altura mide 5 m más que la base, la base mide:

a) 8 b) 6 c) 7 d) 12 e) no se puede determinar

Ejercicio 14. Sean x, y, z números reales tales que:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=-3$$
$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z}=1$$
$$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=3.$$

Entonces, $x+y+z$ es igual a:

a) $1/2$ b) $1/3$ c) $-(1/3)$ d) $-(1/2)$ e) 1

Ejercicio 15. Ana anotó 29 puntos en el juego de baloncesto de su escuela. Ella realizó una combinación de anotaciones de 2 puntos y 3 puntos durante el juego. Si anotó 11 veces, la cantidad de anotaciones de 3 puntos que hizo fue:

a) 6 b) 4 c) 7 d) 5 e) 8

Ejercicio 16. La condición que c debe cumplir para que la ecuación $x^2-12x+c=0$ no tenga soluciones reales es:

a) $c=12$ b) $c<36$ c) $c=36$ d) $c>36$ e) $c=\sqrt{140}$

Ejercicio 17. ¿Para qué valores de n, $2^8+2^{11}+2^n$ es un cuadrado perfecto?

Ejercicio 18. ¿Para qué valores de k la ecuación $kx^2+2x+1-\frac{1}{k}=0$ tiene raíces iguales?

Profesora Lydia Burgoa
Fundación Olimpiada Panameña de Matemática

Ejercicio 19. Encuentra las soluciones enteras del siguiente sistema de ecuaciones

$$x+y+z=2$$
$$x^2-y^2-z^2=2$$
$$x-3y^2+z=0$$

Ejercicio 20. En este cuadrado mágico la suma de los tres números en cada fila, columna y diagonal resulta la misma cantidad. Entonces el valor de x es:

		x
$\sqrt[3]{\sqrt[4]{3^3}}$	$\sqrt[4]{\sqrt[5]{3^5}}$	
		$2(9)^{\frac{1}{8}}$

a)0 b) $\sqrt[3]{3}$ c) $\sqrt[4]{3}$ d) $\sqrt[5]{3}$ e) 1

Progresión Aritmética y Geométrica

Progresión Aritmética

Una progresión aritmética es una sucesión de números donde la diferencia entre los términos consecutivos es constante. Así:

$$a_1, a_1+d, a_1+2d, a_1+3d, \ldots$$

El término n-ésimo de la progresión tiene la forma: $a_n = a_1 + d(n-1)$.

La suma de los n primeros términos de la progresión aritmética está dada por la fórmula:

$$S_n = \frac{(a_1+a_n)n}{2}.$$

Ejemplo: Para la progresión 2, 7, 12, 17, 22,… se tiene que

$$a_6 = 2+5(5) = 27 \quad \text{y} \quad S_6 = \frac{(2+27)(6)}{2} = 87.$$

Toma nota:

- En una progresión aritmética, cada término después del primero es el promedio, o lo que es lo mismo, la media aritmética de los términos vecinos.
- Si x, y, z están en progresión aritmética entonces $y-x=z-y$.

Progresión Geométrica
Una progresión geométrica es una sucesión de números donde la razón entre los términos consecutivos es constante. Así: $a_1, a_1r, a_1r^2, a_1r^3, ...$

El término *n*-ésimo de la progresión tiene la forma: $a_n = a_1r^{n-1}$.

La suma de los *n* primeros términos de la progresión geométrica está dada por la fórmula:

$$S_n = a_1\frac{(r^n - 1)}{r - 1}.$$

Ejemplo: Para la progresión 1, 10, 10², 10³,… se tiene que

$$a_4 = 10^5 \quad \text{y} \quad S_4 = \frac{10^4 - 1}{10 - 1} = \frac{9999}{9} = 1111.$$

✐ Toma nota:

- En una progresión geométrica, cada término después del primero es la raíz cuadrada del producto de los términos vecinos. Es la media geométrica de los términos vecinos.
- Si *x, y, z* están en progresión geométrica entonces, *y/x=z/y*.
- Si $-1 < r < 1$, r^n es muy pequeño cuando *n* toma valores muy grandes.

  Por lo que, en este caso, $S_n = a_1\left(\frac{1}{1-r}\right)$.

Ejercicios

A continuación, te proponemos algunos ejercicios sobre el tema:

Ejercicio 1. Encuentra el $5^{to}, 10^{mo}$ y n-ésimo término, la diferencia o la razón en cada una de las siguientes progresiones:

$3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}, ...$; $2, 2^2, 2^3, 2^4 ...$; $1, -2, 4, -8, ...$; $1, -1, 1, -1, \ldots$; $2, 5, 8, 11, ...$

Ejercicio 2. Halla

a) a_{11} si $a_1 = 2 + \sqrt{2}; a_2 = 3$

b) S_n si $a_7 = 7/3$, $d = -2/3$, $n = 15$

c) el término 12^{do} de la progresión geométrica si los términos 2^{do} y 3^{ro} son 2 y $-\sqrt{2}$.

Ejercicio 3. Escribe cinco medias aritméticas entre 3 y -5. Escribe dos medias geométricas entre 4 y 500.

Ejercicio 4. a) Encuentra la suma de los números enteros entre 50 y 350 que terminan en 1. b) Encuentra la suma de los números enteros del 1 al 30.

Ejercicio 5. Aquiles leyó un libro, el primer día leyó 5 páginas y cada día siguiente leyó 2 páginas más que el anterior. Si terminó el libro en 20 días, ¿cuántas páginas tenía el libro?

Ejercicio 6. Escribe 0,227272727… como fracción.

Ejercicio 7. Un tercio del aire de un tanque se extrae al aplicar una bomba de vacío. ¿Qué parte de la cantidad original de aire del tanque queda después de la centésima aplicación?

Ejercicio 8. Sean $a_1, a_2, ...$ y $b_1, b_2, ...$ progresiones aritméticas tales que $a_1 = 25$, $b_1 = 75$ y $a_{100} + b_{100} = 100$. Encuentra la suma de los primeros 100 términos de $a_1 + b_1, a_2 + b_2, ...$

Ejercicio 9. Ana reparte caramelos a sus amigas. A la primera le da uno, a la segunda dos, a la tercera le da el doble de caramelos que le dio a la segunda y así sucesivamente. Si Ana tiene 2011 dulces, ¿cuál es la mínima cantidad de dulces que le faltan para poder repartirlos de esta manera?

Ejercicio 10. Encuentra las medidas de los lados de un triángulo rectángulo sabiendo que las mismas están en progresión aritmética de diferencia 3.

ꝏ Polinomios

Una expresión algebraica es una constante, una variable o cualquier combinación de constantes y variables por adición, sustracción, multiplicación, división o radicación.
Ejemplos:

$$x^2 - 5x + 2, \quad \frac{x^2 - y^2}{5xy}, \quad y, \quad \sqrt{2-x}$$

son expresiones algebraicas.

Una expresión algebraica de la forma:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

se denomina polinomio. Cada uno de los $a_i x^i$ se denomina término, los números reales $a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0$ son los coeficientes, a x se le llama indeterminada y el mayor exponente al que está elevada la indeterminada se llama grado del polinomio.

Ejemplo 1: $x^3 - 4x^2 + 2x - 3$ es un polinomio de grado 3 con coeficientes 1, -4, 2 y -3.

Repasa las operaciones con polinomios: adición, sustracción, multiplicación y división. Para resolver problemas de olimpiadas, es muy útil conocer factorización y división sintética.

Algoritmo de la división para polinomios:
Sean *f*(*x*) y *g*(*x*) polinomios. Entonces,

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x)$$

donde *q*(*x*), *r*(*x*) son polinomios y el grado de *r*(*x*) es menor que el grado de *g*(*x*). El polinomio *q*(*x*) se denomina cociente y *r*(*x*) se denomina residuo.

Ejemplo 2: Si se hace la división de $x^3 + 4x$ entre $x+1$, se obtiene $x^3 + 4x = (x^2 - x + 5)(x+1) - 5$ donde $x^2 - x + 5$ es el cociente y -5 es el residuo.

Raíz de un polinomio: a es raíz de un polinomio *p*(*x*), si *p*(*a*)=0.

Teorema de Residuo: Si el polinomio *p*(*x*) se divide por $x-a$ el residuo es *p*(*a*).

Teorema del Factor: Si a es una raíz del polinomio *p*(*x*), entonces $x-a$ es un factor.

Ejemplo 3: Si $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = P(x+2)(x-3)$, donde P es un polinomio. Entonces P es igual a: a) $x-4$ b) $x+4$ c) $x+3$ d) $x+2$ e) $x-2$
Solución: Si $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = P(x+2)(x-3)$ donde P es un polinomio, entonces P debe ser de la forma $P = (x + a)$. Luego las raíces del polinomio dado serían -2, 3 y $-a$ y satisfacen la condición, $2 \cdot -3 \cdot a = 12$. Por tanto $a = -2$.

Ejemplo 4: Si el residuo de dividir el polinomio $p(x) = ax^5 + bx^3 + cx - 8$ entre $x+3$ es 6, determina el residuo de dividir *p*(*x*) entre $x-3$.
Solución: De acuerdo con el teorema del residuo, si al dividir *p*(*x*) entre (*x* + 3) el residuo es 6, entonces, $p(-3)$ = 6. Es decir,

$$p(-3) = a(-3)^5 + b(-3)^3 + c(-3) - 8 = 6\,.$$

De donde,

$$-a(3)^5 - b(3)^3 - c(3) = 14.$$

Luego,

$$p(3) = a(3)^5 + b(3)^3 + c(3) - 8 = -14 - 8 = -22\,.$$

El residuo de dividir *p*(*x*) entre $x-3$ es -22.

Ejercicios

Te invitamos a resolver unos pocos ejercicios relativos a polinomios.
Ejercicio 1. Dado que $p(x) = x^3 + ax + 1$ y que $p(1)$ = 1, ¿Cuánto vale *p*(2)?

Ejercicio 2. El polinomio $p(x) = x^2 - 3x - 5$ tiene como raíces a α y β encuentra $\alpha^2 + \beta^2$.

Ejercicio 3. Determina el menor número entero positivo x para que $\dfrac{5x+23}{x-7}$ sea un número entero ($x \neq 7$).

Profesora Lydia Burgoa
Fundación Olimpiada Panameña de Matemática

Ejercicio 4. Hallar el residuo que resulta cuando $p(x)=(x+3)^5+(x+2)^8+(5x+9)^{2012}$ se divide por x+2.

Ejercicio 5. Encuentra el valor de k para que el resto de la división del polinomio $p(x)=5x^4+x^2-kx-4$ entre (x − 2) sea − 3.

Ejercicio 6. Al dividir un polinomio por $x-1$ se obtiene como residuo 2 y al dividirlo por $x-2$ se obtiene como residuo 1. ¿Cuál es el residuo al dividirlo por $(x-1)(x-2)$?

Ejercicio 7. Sean a, b y c raíces del polinomio $p(x)=x^3-6x^2+5x-1$, calcula el valor de $a^3+b^3+c^3$.

Ejercicio 8. Usa el teorema del factor y el teorema del residuo para factorizar el polinomio $p(x)=x^3-2x^2-5x+6$.

Ejercicio 9. Si $p(x)=x^2-5x+6$ es factor del polinomio de tercer grado $q(x)=3x^3+ax^2+bx+12$, encuentra los valores de a y b.

Ejercicio 10. El polinomio $p(x)=x^2+ax+a$ es un factor de $q(x)=x^3-2x-4$. El valor de $p(0)$ es:

a) 2 b) -2 c) 1 d) 4 e) -4

Profesora Lydia Burgoa
Fundación Olimpiada Panameña de Matemática