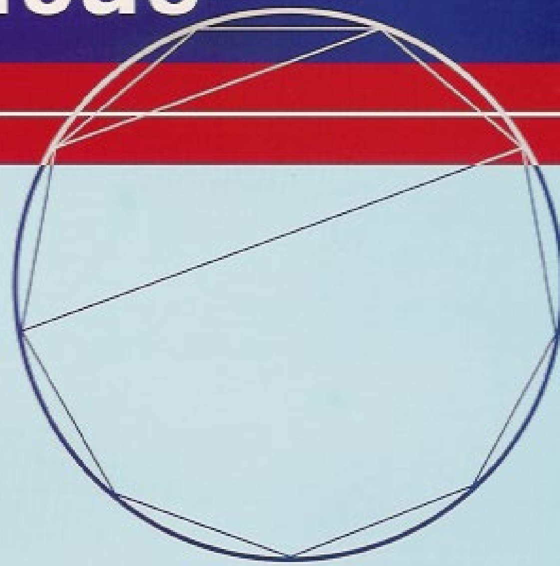
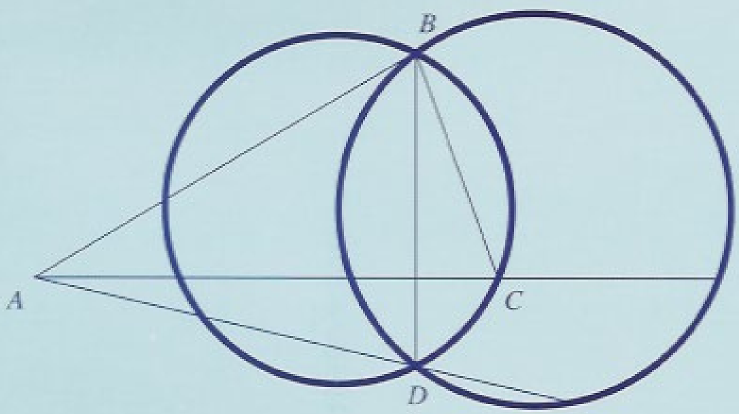
# Cien Problemas de Olimpiadas
# Matemáticas

Lydia Burgoa
Pedro Marrone



$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = a_n + 2n, \quad n \geq 1 \end{cases}$$




$$\cos\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$$

GrupoSantillana
Olimpiada Panameña de Matemática

# Cien Problemas de Olimpiadas Matemáticas

**Lydia Burgoa**
**Pedro Marrone**

GrupoSantillana

Olimpiada Panameña de Matemática

| | |
|---|---|
| Publicación Conjunta: | Grupo Santillana |
| | Comisión de Olimpiada Panameña de Matemática |
| Compilación y Edición: | Lydia O. Burgoa M. |
| | Pedro A. Marrone G. |
| Diagramación: | Pedro A. Marrone G. |
| Diseño de Cubierta: | OffsetColor |

Impresión: OffsetColor
Calle 40 Nº 3-29; Panamá, República de Panamá
Tiraje: 300 ejemplares

510.7
B915 Burgoa Medina, Lydia O.
Cien Problemas de Olimpiadas Matemáticas / Lydia O., Burgoa M., Pedro A., Marrone G. – Panamá. Grupo Santillana, Comisión de Olimpiada Panameña de Matemática.
141p. ; 27cm.

ISBN 9962-630-77-0

1. MATEMÁTICAS 2. MATEMÁTICAS – PROBLEMAS, EJERCICIOS I. Título.

2000 Mathematics Subject Classification: 00A07, 00A08

Comisión de Olimpiada Panameña de Matemática
Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y Tecnología
Universidad de Panamá
http://olimpiada.tripod.com



**Generación del Centenario, Nueva Universidad,**
**Nuevo Liderazgo, Desarrollo Humano Sostenible**

# Prólogo

La actividad olímpica se propone estimular en el joven el estudio de la Matemática, haciéndola una ciencia amena y retadora. La olimpiada pretende servir al desarrollo de las habilidades de los estudiantes en la resolución de problemas.

Con gran satisfacción ponemos a su consideración esta obra que hemos denominado *Cien Problemas de Olimpiadas Matemáticas* como un homenaje a los *cien años de la República.*

Les presentamos una compilación de problemas de olimpiadas nacionales e internacionales en las que han participado jóvenes estudiantes panameños. Hemos dividido el material en cuatro secciones, Álgebra, Aritmética, Geometría y Misceláneos. Los problemas de este trabajo fueron escogidos por los diversos métodos, ideas o conceptos empleados para su resolución y varían en grado de dificultad.

A continuación de la lista de enunciados, el lector encontrará una solución a cada problema. A esos jóvenes que tras aceptar el reto, se introducen en el mundo del desaliento y la satisfacción de la resolución de problemas, les recomendamos que consulten las soluciones sólo para comprobar las propias. Incluimos algunas soluciones que nos han parecido ingeniosas y llevan el nombre del estudiante autor de las mismas.

Confiamos que este esfuerzo cumpla con su propósito, enriquecer el material de entrenamiento de los estudiantes que compiten en la Olimpiada Panameña de Matemática.

Marzo de 2003

Los problemas de las olimpiadas nacionales que aparecen en esta obra, corresponden a los presentados en las olimpiadas matemáticas de los años 1995 a 2002. En este periodo, los miembros del Comité de Pruebas de la Comisión de Olimpiada Matemática de la Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y Tecnología de la Universidad de Panamá, fueron:

| | |
|---|---|
| Teresita de Ávila | Rosa de Lay |
| Lydia Burgoa | Pedro Marrone |
| Miguel Cáceres | Omar Oliveros |
| Wenceslao De Los Ríos | Josué Ortíz |
| Evangelista González | Rogelio Rosas |
| Flor María de Gil | Teresita de Ruíz |
| Jaime Gutiérrez | Silverio Vergara |
| Jorge Hernández | Enrique Williamson |
| Jaime Jaramillo | |

*Hacemos un reconocimiento al talento y entusiasmo de todos los jóvenes estudiantes que han representado a Panamá en competencias internacionales. Queremos elogiar la dedicación de los profesores que han preparado a estos estudiantes para las competencias.*

*Matemática, motor del desarrollo del país en su próxima centuria*

# Contenido

# Abreviaturas y Simbología

**I** Para referencia se utilizaron las siguientes abreviaturas

| | |
|---|---|
| [OPM] | Olimpiada Panameña de Matemática |
| [ONM] | Olimpiada Nacional de Matemática |
| [OIM] | Olimpiada Iberoamericana de Matemática |
| [OCC] | Olimpiada Matemática de Centro América y El Caribe |
| [OM] | Olimpiada de Mayo |

**II** En la obra se emplean los siguientes símbolos

| | |
|---|---|
| $\Delta ABC$ | Triángulo de vértices $A$, $B$ y $C$ |
| $\square ABCD$ | Rectángulo de vértices $A$, $B$, $C$ y $D$ |
| $\widehat{ABC}$ | Arco determinado por los puntos $A$, $B$ y $C$ |
| $\overline{AB}$ | Segmento de extremos $A$ y $B$ |
| $AB$ | Medida del segmento de extremos $A$ y $B$ |
| $\overleftrightarrow{AB}$ | Recta determinada por los puntos $A$ y $B$ |
| $\angle ABC$ | Ángulo $A$, $B$, $C$ |
| $m\angle ABC$ | Medida del ángulo $A$, $B$, $C$ |
| $\mathbb{N}$ | Conjunto de los números naturales |
| $\mathbb{Z}$ | Conjunto de los números enteros |
| $\mathbb{Q}$ | Conjunto de los números racionales |
| $\mathbb{R}$ | Conjunto de los números reales |

Para $x$, $y$ números reales:

| | |
|---|---|
| $x > y$ | $x$ es mayor que $y$ |
| $x \geq y$ | $x$ es mayor o igual que $y$ |
| $x < y$ | $x$ es menor que $y$ |
| $x \leq y$ | $x$ es menor o igual que $y$ |

| | |
|---|---|
| $[\![x]\!]$ | Parte entera de $x$ |
| $\lvert x \rvert$ | Valor absoluto de $x$ |
| $\sum_{i=1}^{n} x_i$ | Suma de los números $x_1$ hasta $x_n$ |

Sean $a$, $b$, $c$, $d$ y $n$ números naturales:

| | |
|---|---|
| $\operatorname{mcd}(a,b)$ | El máximo común divisor de $a$ y $b$ |
| $a \equiv b \pmod{n}$ | $a$ es congruente con $b$ módulo $n$ |
| $a : b :: c : d$ | Igualdad de dos razones |
| $\overline{abc\cdots}_n$ | Representación de un número en base $n$ |

Si $f$, $g$ denotan funciones, entonces:

| | |
|---|---|
| $f(g(x))$ | Imagen de $x$ por la función compuesta de $f$ y $g$ |
| $\log_r$ | Función logaritmo de base $r$, $r \neq e$ |
| $\tan$ | Función tangente |
| $\cot$ | Función cotangente |

# Temario

A continuación encontrará los temas que debe conocer para enfrentar con éxito los problemas planteados en esta obra. Este temario debe considerarse como una guía y no pretender ser exhaustivo.

**ARITMÉTICA**
Números Naturales, Enteros, Racionales y Reales. Operaciones: adición, sustracción multiplicación, división, potenciación y radicación. Propiedades de las operaciones. Representación de un número en la base $n \in \mathbb{N}$. Razones y proporciones. Valor absoluto. Divisibilidad en los números enteros: Divisor y múltiplo. Algoritmo de la División. Números primos y compuestos. Teorema Fundamental de la Aritmética. Máximo común divisor y mínimo común múltiplo. Criterios de divisibilidad. Congruencias.

**ALGEBRA**
Exponentes y radicales. Expresiones algebraicas. Operaciones. Productos notables y factorización. Polinomios. Raíces de un polinomio. Teorema del Residuo. Relación entre los coeficientes de un polinomio y sus raíces. Expresiones racionales. Ecuaciones y sistemas de ecuaciones. Determinantes. Desigualdades e inecuaciones. Inducción Matemática. El Teorema del Binomio. Funciones. Operaciones. Función inyectiva, sobreyectiva y función inversa. Funciones Algebraicas y Trascendentes. Ecuaciones exponenciales y logarítmicas. Progresiones aritméticas y geométricas. Sucesiones.

**GEOMETRÍA**
Nociones básicas. Ángulos. Clasificación. Perpendicularidad y Paralelismo. Triángulos. Clasificación según la medida de lados y ángulos. Líneas y puntos notables de un triángulo. Congruencia y Semejanza de Triángulos. El Teorema de Pitágoras. Área de un triángulo. Cuadriláteros. Elementos y sus Propiedades. Área del cuadrilátero. Polígonos. Clasificación según el número de lados. Polígonos regulares. Perímetro y área de polígonos. La circunferencia y el círculo. Elementos. Longitud de la circunferencia. Área del círculo. Ángulo central e inscrito. Cuerpos geométricos. Superficie lateral total y volumen. Razones trigonométricas. Geometría Analítica.

**TEORÍA COMBINATORIA Y PROBABILIDAD**
Permutaciones. Combinaciones. Cálculo de probabilidad de un evento.

# Álgebra - Problemas

# Problemas de Álgebra

**[OPM 2002]**

**1.** Sean $a$, $b$ números enteros tales que $x^2 - x - 1$ es factor de $ax^3 + bx^2 + 1$. El valor de $b$ es:

a) $-2$ b) $-1$ c) 0 d) 1 e) 2

**[ONM 1998]**

**2.** Se da una progresión geométrica (de razón racional no entera) de cinco términos, cada uno de los cuales es un entero positivo menor que 100. La suma de los cinco términos es 211. Si $S$ es la suma de aquellos términos de la progresión que son cuadrados de enteros, entonces $S$ es igual a:

a) 0 b) 91 c) 133 d) 195

e) Ninguna de las anteriores

**[OPM 2002]**

**3.** Sea $f$ una función definida en el conjunto de los números naturales que verifica las siguientes propiedades para todo $m$, $n$:

$f(nm) = f(n) + f(m)$;
$f(5) = f(10) = 0$ y
$f(n) = 0$ si el dígito de las unidades de $n$ es 3.

El valor de $f(59286)$ es:

a) 0 b) 2 c) 3 d) 41 e) 82

**[ONM 1995]**

**4.** Un factor de $x^4 + 4$ es:

a) $x + 2$ b) $x^2 + 2$ c) $x^2 - 2x + 2$ d) $x^2 - 2x - 2$

e) Ninguna de las anteriores

**[ONM 1995]**

**5.** Los valores de $y$ que satisfacen el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2x^2 + 6x + 5y + 1 = 0 \\ 2x + y + 3 = 0 \end{cases}$$

pueden encontrarse resolviendo la ecuación:

a) $y^2 + 14y - 7 = 0$ b) $y^2 + 10y - 7 = 0$

c) $y^2 + 8y - 1 = 0$ d) $y^2 + y - 12 = 0$

e) Ninguna de las anteriores

**[OPM 2001]**

**6.** Sea $f$ una función real tal que:

$$f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = x\,,$$

entonces:

a) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$ b) $f(x-1) = \dfrac{x+1}{x}$ c) $f\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right) = \dfrac{1}{x}$

d) $f(x+1) = x(x-1)$ e) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$

**[ONM 1998]**

**7.** La sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ está definida por

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = a_n + 2n, \quad n \geq 1 \end{cases}$$

entonces $a_{100}$ es igual a:

a) 9900 b) 9902 c) 9904 d) 10100

e) Ninguna de las anteriores

**[ONM 1998]**

**8.** Supongamos que $x$, $y$ son números reales tales que $|x| \neq |y|$. Supongamos además, que $x$ e $y$ satisfacen las siguientes condiciones:

$$x^3 = 13x + 3y$$
$$y^3 = 3x + 13y.$$

Entonces $(x^2 - y^2)^2$ es igual a:

a) 26 b) 61 c) 133 d) 160

e) Ninguna de las anteriores

**[OPM 2001]**

**9.** Sea $S$ el subconjunto de números reales, definido por $S = \{ a + b\sqrt{2} \ / \ a,b \in \mathbb{Q} \}$. El inverso multiplicativo del número no nulo $a + b\sqrt{2}$ es:

a) $\dfrac{a + b\sqrt{2}}{a^2 + 2b^2}$ b) $\dfrac{a - b\sqrt{2}}{a^2 - 2b^2}$ c) $\dfrac{a - b\sqrt{2}}{a^2 + 2b^2}$

d) $\dfrac{a + b\sqrt{2}}{a^2 - 2b^2}$ e) $\dfrac{\sqrt{2}}{2a + b\sqrt{2}}$

**[OPM 2001]**

**10.** Si $a + b = 1$ y $a^2 + b^2 = 2$, entonces $a^3 + b^3$ es igual a:

a) 9 b) 5 c) $\dfrac{7}{2}$ d) 3 e) $\dfrac{5}{2}$

**[ONM 1996]**

**11.** La cantidad de pares distintos de números enteros $(x, y)$ que satisfacen las ecuaciones

$$\begin{cases} x = x^2 + y^2 \\ y = 2xy \end{cases}$$

es:

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4

e) Ninguna de las anteriores

**[ONM 1998]**

**12.** El número de funciones polinomiales que satisfacen $f(x^2) = [f(x)]^2 = f(f(x))$ es:

a) 3 b) 2 c) 1 d) 0

e) Ninguna de las anteriores

**[ONM 1998]**

**13.** Tres números cuya suma es 93, forman una progresión geométrica de razón distinta de 1. Ellos son el primero, segundo y séptimo término de una progresión aritmética. El primer término de la progresión geométrica es:

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4

e) Ninguna de las anteriores

**[OPM 2001]**

**14.** Si $a + b + c = 0$, entonces $a^3 + b^3 + c^3$ es igual a:

a) 0 b) $-a^2 - b^2 - c^2$ c) $6abc$ d) $a^2 + b^2 + c^2$ e) $3abc$

**[ONM 1998]**

**15.** Considérese la expresión

$$a^2\frac{(d-b)(d-c)}{(a-b)(a-c)} + b^2\frac{(d-c)(d-a)}{(b-c)(b-a)} + c^2\frac{(d-a)(d-b)}{(c-a)(c-b)}$$

Al simplificarla obtenemos:

a) $a^2$ b) $b^2$ c) $c^2$ d) $d^2$

e) Ninguna de las anteriores

**[OPM 2001]**

**16.** Si $x < -2$ entonces $|1 - |1 + x||$ es igual a:

a) $2 + x$ b) $-(2 + x)$ c) $x$ d) $-x$ e) $-2$

**[ONM 1996]**

**17.** Un polinomio de grado 3 en la indeterminada $x$ es tal que el coeficiente de $x^2$ es menor en 3 unidades que el coeficiente de $x^3$. El coeficiente de $x$ es tres veces el coeficiente de $x^2$ y el coeficiente restante es mayor en dos unidades que el coeficiente de $x^3$. La suma de los coeficientes es $-4$. Si el polinomio se multiplica por $2x-1$ se obtiene:

a) $2x^4+3x^3-14x^2+3$ b) $2x^4-3x^3-14x^2+3$

c) $2x^4-3x^3+14x^2+3$ d) $2x^4+3x^3-14x^2-3$

e) Ninguna de las anteriores

**[ONM 1998]**

**18.** La suma de los tres primeros términos de una progresión geométrica es igual a 6, y la suma del segundo, tercero y cuarto término es igual a (–3). El quinto término de la progresión es:

a) $-\frac{1}{2}$ b) $-1$ c) $\frac{1}{2}$ d) $1$

e) Ninguna de las anteriores

**[ONM 1998]**

**19.** Una sucesión de números $a_1, a_2, \cdots$ está definida por:

$$\begin{cases} a_1 = -5 \\ a_2 = 4 \\ a_n = a_{n-1} - a_{n-2}, \quad n \geq 3 \end{cases}$$

El término 149 de la sucesión es:

a) $-9$ b) $-5$ c) $-4$ d) $5$

e) Ninguna de las anteriores

**[ONM 1998]**

**20.** El conjunto solución del sistema:

$$\begin{aligned} ax+by+cz&=a+b+c\\ bx+cy+az&=a+b+c\\ cx+ay+bz&=a+b+c \end{aligned}$$

en donde $a$, $b$, $c$ son números reales distintos y $a+b+c\neq 0$ es:

a) vacío b) unitario c) finito no unitario

d) infinito

**[ONM 1997]**

**21.** Dos velas del mismo tamaño se encienden simultáneamente. La primera se consume en 4 horas y la segunda en 3 horas. Asumiendo que cada vela se quema a razón constante, ¿cuántas horas después de encenderse las velas, estuvo la primera al doble de la altura de la segunda?

a) $\frac{3}{4}$ hora b) $1\frac{1}{2}$ horas c) 2 horas d) $2\frac{2}{5}$ horas

e) Ninguna de los anteriores

**[OPM 2001]**

**22.** Si $x$ es un número real y si $4y^2+4xy+x+6=0$, entonces $y$ es un número real para los $x$ tales que:

a) $x\leq -2$ ó $x\geq 3$ b) $x\leq 2$ ó $x\geq 3$

c) $x\leq -3$ ó $x\geq 2$ d) $-3\leq x\leq 2$ e) $-2\leq x\leq 3$

**[OPM 2001]**

**23.** Si las soluciones de la ecuación $x^2+px+q=0$ son el cubo de las soluciones de la ecuación $x^2+mx+n=0$ entonces:

a) $p=m^3+3mn$ b) $p=m^3-3mn$ c) $p+q=m^3$

d) $\left(\dfrac{m}{n}\right)^3=\dfrac{p}{q}$ e) $m^3+n^3=p$

**[ONM 1998]**

**24.** La función $f$ está definida en el conjunto de los números enteros por:

$$f(n) = \begin{cases} n-3, & \text{si } n \geq 1000 \\ f(f(n+5)), & \text{si } n < 1000\,. \end{cases}$$

Entonces $f(84)$ es igual a:

a) 81 b) 997 c) 998 d) 1001

e) Ninguna de las anteriores

**[ONM 1996]**

**25.** Sea $\mathbb{N}$ el conjunto de los números naturales. La función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, definida por

$f(n) = 3^n - 2^n$, para $n \in \mathbb{N}$, es:

a) sobreyectiva, no inyectiva b) inyectiva, no sobreyectiva

c) biyectiva d) no inyectiva, no sobreyectiva

**[ONM 1996]**

**26.** Si $a, b, c$ y $d$ son números reales no nulos tales que $c$ y $d$ son solución de la ecuación $x^2 + ax + b = 0$ y $a, b$ son solución de $x^2 + cx + d = 0$ entonces $a + b + c + d$ es igual a:

a) $\dfrac{-1+\sqrt{2}}{2}$ b) $-2$ c) $2$ d) $4$

e) Ninguna de las anteriores

**[ONM 1997]**

**27.** Si $a > -1$, el conjunto solución de la inecuación

$$(x-a)^2 < x(x+2) - a$$

es el subconjunto de los números reales $x$ tales que:

a) $x < \dfrac{a}{2}$ b) $x < -\dfrac{a}{2}$ c) $x > \dfrac{a}{2}$ d) $x > -\dfrac{a}{2}$

e) Ninguna de las anteriores

**[ONM 1997]**

**28.** Se define una sucesión por

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_{n+1} = x_n + \tfrac{1}{2}, \quad n \geq 2, \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

La suma

$$S_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

es igual a:

a) $\dfrac{n+1}{2}$ b) $\dfrac{n+3}{2}$ c) $\dfrac{n^2+n}{4}$ d) $\dfrac{n^3+3n}{4}$

e) Ninguna de las anteriores

**[ONM 1996]**

**29.** Si $3k+1$, $k-3$ y $2k+9$ son tres términos consecutivos de una progresión geométrica entonces $k$ puede tomar:

a) Un solo valor positivo b) Un solo valor negativo

c) Dos valores positivos d) Dos valores negativos

e) Ninguna de las anteriores

**[OIM 2002]**

**30.** Los números enteros del 1 al 2002, ambos inclusive, se escriben en una pizarra en orden creciente 1, 2, … , 2001, 2002. Luego, se borran los que ocupan el primer lugar, el cuarto lugar, séptimo lugar, etc., es decir, los que ocupan los lugares de la forma $3k + 1$.

En la nueva lista se borran los números que están en los lugares de la forma $3k + 1$. Se repite el proceso hasta que se borran todos los números de la lista. ¿Cuál fue el último número que se borró?

# Aritmética - Problemas

# Problemas de Aritmética

**[OPM 2001]**

**1.** La cantidad de números del 1 al 50 que no son divisibles ni por 5 ni por 7 y no contienen ni 5 ni 7 entre sus dígitos es:

a) 30 b) 31 c) 32 d) 33 e) 34

**[OPM 2001]**

**2.** Si los siguientes números se escriben de menor a mayor, el que está en el medio es:

a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{3}{10}$ c) 31% d) 0.03 e) 0.303

**[OPM 2001]**

**3.** La cantidad de dígitos que tiene el número $8^2 \times 10^{13}$ es:

a) 12 b) 13 c) 15 d) 17 e) 26

**[OPM 2001]**

**4.** $\dfrac{1000^2}{252^2 - 248^2}$ es igual a:

a) 2500 b) 1000 c) 500 d) 250 e) 200

**[OPM 2002]**

**5.** La diferencia entre la suma de todos los números pares hasta 2002 y la suma de todos los números impares hasta el 2002 es:

a) 0 b) 1000 c) 1001 d) 2001 e) 2002

**[OPM 2002]**

**6.** El producto de dos números es 36 y su suma es 20. La suma de los cuadrados de estos números es:

a) 72 b) 97 c) 53 d) 328 e) 472

**[ONM 1997]**

**7.** El valor de la expresión $\sqrt{3+2\sqrt{2}}-\sqrt{3-2\sqrt{2}}$ es

a) $-2$ b) 0 c) 1 d) 2

e) Ninguna de los anteriores

**[ONM 1995]**

**8.** Si la mercancía que se compró el lunes subió un 10 por ciento el martes y bajó un 10 por ciento el miércoles, ¿cuánto se pagó por la mercancía el lunes si se vendió el miércoles en B/. 99.00 ?

a) B/. 99. 00 b) B/. 110. 00 c) B/. 89. 00 d) B/. 100. 00

e) Ninguna de los anteriores

**[OPM 2002]**

**9.** ¿ Cuál de las potencias siguientes tiene mayor valor?

a) $2^{32}$ b) $4^{15}$ c) $8^{11}$ d) $16^{8}$ e) $32^{6}$

**[OPM 2002]**

**10.** Un bloque en una pirámide de Egipto mide 180 cm de ancho, 504 cm de largo y 396 cm de altura. La medida en centímetros de la vara de mayor longitud con que un arqueólogo puede medir de manera exacta las dimensiones del bloque es:

a) 12 b) 18 c) 24 d) 36 e) 48

**[ONM 1998]**

**11.** Al evaluar el producto

$$(\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{7})(\sqrt{5}+\sqrt{6}-\sqrt{7})(\sqrt{5}-\sqrt{6}+\sqrt{7})(-\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{7})$$

obtenemos:

a) $-104$ b) $-60$ c) 60 d) 104

e) Ninguna de las anteriores

**[OPM 2001]**

**12.** El residuo de la división por 7 de $15^{24} + 24^{15}$ es:

a) 5 b) 4 c) 3 d) 2 e) 0

**[OPM 2001]**

**13.** $4^4 \cdot 9^4 \cdot 4^9 \cdot 9^9$ es igual a:

a) $13^{13}$ b) $13^{36}$ c) $36^{13}$ d) $36^{36}$ e) $1296^{26}$

**[ONM 1998]**

**14.** Sean $a$ y $b$ números de dos dígitos, tales que el doble del mayor sumado al triple del menor da como resultado 72. Supongamos que:

i) al mayor de los dos se le añade a derecha un cero y los dígitos que forman el menor

ii) el mayor seguido de un cero se agrega a derecha del menor.

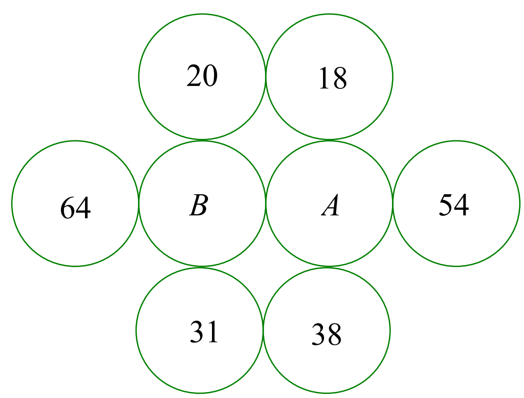
Entonces, la división del número encontrado en (i) por el número determinado en (ii) tiene como cociente 2 y resto 590. Los números son:

a) 21 y 10 b) 18 y 12 c) 15 y 14 d) 12 y 16

e) Ninguna de las anteriores

**[OPM 2001]**

**15.** Aura ($A$) y Berta ($B$) van al estadio y son rodeadas por 6 aficionados. La edad de los aficionados se muestra en la figura. Por casualidad, la edad de Aura es el promedio de las edades de las personas más cercanas a ella, también la edad de Berta es el promedio de las edades de las personas más cercanas a ella.




La edad de Berta es:

a) 37 años b) $37^1/_2$ años c) 38 años

d) $38^1/_2$ años e) $42^1/_2$ años

**[OPM 2001]**

**16.** La media aritmética de 40 números es 55, si de los números considerados se eliminan el 12, 15, 17, 18 y 38; la nueva media aritmética es:

a) 60 b) 57.5 c) 52.5 d) 50 e) 47.5

**[ONM 1995]**

**17.** Si el mayor de dos números enteros se divide por el menor, el cociente es 2 y el resto 9 y si 6 veces el menor se divide por el mayor, el cociente es 2 y el residuo 16. El menor de los números es:

a) 43 b) 17 c) 15 d) 39

e) Ninguna de las anteriores

**[OPM 2001]**

**18.** Uno de estos números es igual al producto de los otros cuatro. Este número es:

a) $-2$ b) $\frac{3}{4}$ c) $\frac{1}{6}$ d) $-\frac{1}{4}$ e) 9

**[OPM 2001]**

**19.** Sabiendo que $m$ es un entero par y que $n$ es un entero, el número $(m + 1)^2 + n(m + 1)$ es:

a) Siempre impar b) Siempre par

c) Par solamente cuando $n$ es par d) Par solamente cuando $n$ es impar

e) No se puede determinar

**[ONM 1995]**

**20.** Dado el número $x$ de 3 cifras, forme un nuevo número de 6 cifras, repitiendo las tres cifras en el mismo orden. Si se divide este nuevo número por 7 y el resultado se divide por 11, se obtiene:

a) $77x$ b) $13x$ c) $3x$ d) $22x$

e) Ninguna de las anteriores

**[OPM 2001]**

**21.** El total de pares de números de la forma $(x, 2x + 1)$ tales que ambos sean números primos menores que 100, es:

a) 4 b) 5 c) 6 d) 7 e) 8

**[OPM 2001]**

**22.** La relación entre $a$ y $b$ si $a = (999222)$ y $b = (999221)(999223)$ es:

a) $2a = b$ b) $b - a^2 = 1$ c) $a^2 - b = 1$ d) $a^2 - b^2 = 1$ e) $\frac{b}{a^2} = 1$

**[OPM 2002]**

**23.** Un número de seis cifras empieza por la izquierda con la cifra dos. Si se pasa esta cifra del primer lugar al último sin alterar el orden de las demás cifras, se obtiene un número tres veces mayor que el número original. Las tres primeras cifras del número original son:

a) 255 b) 257 c) 258 d) 275 e) 285

**[ONM 1995]**

**24.** Dado el número 135 al convertirlo al sistema binario se obtiene:

a) $1110001_2$ b) $10001101_2$ c) $10000111_2$ d) $11000111_2$

e) Ninguna de las anteriores

**[ONM 1996]**

**25.** Un ganadero sólo sabe contar sus vacas de 2 en 2, 3 en 3, 4 en 4 y de 5 en 5. Observa que al contar el ganado de su finca de 2 en 2 le sobra uno, de 3 en 3 le sobra uno, de 4 en 4 le sobra uno, de 5 en 5 no le sobra nada. El menor número de vacas que puede tener el ganadero es:

a) 15 b) 25 c) 35 d) 45

e) Ninguna de las anteriores.

**[ONM 1996]**

**26.** ¿Cuántos números naturales dejan un resto 3 cuando dividen a 51 y resto 2 cuando dividen a 38?

a) 2 b) 3 c) 4 d) 5

e) Ninguna de las anteriores

**[ONM 1996]**

**27.** Un cierto número entero $n$ es múltiplo de 5 y 9. ¿Cuáles de las siguientes alternativas son verdaderas?

I. $n$ es un entero impar II. $n$ es igual a 45 III. $n$ es un múltiplo de 15

a) I y III solamente b) II y III solamente

c) III solamente d) I, II y III

e) Ninguna de las anteriores

**[ONM 1996]**

**28.** Si $a$ y $b$ son enteros positivos pares, ¿cuáles de los siguientes números serán enteros pares?

I. $a^b$ II. $(a+1)^b$ III. $a^{b+1}$

a) II solamente b) I y II solamente c) I y III solamente

d) I, II y III e) Ninguna de las anteriores

**[ONM 1997]**

**29.** El producto

$$0.5 \times 0.75 \times 0.375 \times 0.666$$

es igual a:

a) $3/32$ b) $1/16$ c) $5/32$ d) $3/16$

e) Ninguna de las anteriores

**[ONM 1995]**

**30.** La suma de los números impares menores que 1000 es:

a) 1 000 000 b) 500 000 c) 250 000 d) 150 000

e) Ninguna de las anteriores

# Geometría - Problemas

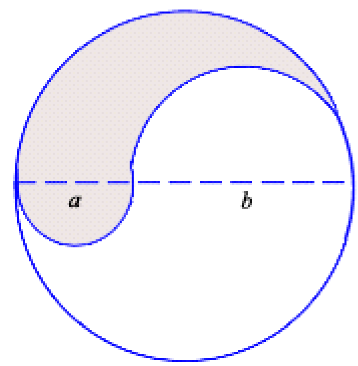
## Problemas de Geometría

**[OPM 2001]**

**1.** Una circunferencia de diámetro $a + b$ se divide en dos regiones mediante las fronteras de las semicircunferencias de diámetros $a$ y $b$ respectivamente según se indica en la figura. La razón del área de la región sombreada al área de la región no sombreada es:

a) $\dfrac{a}{b}$ b) $\dfrac{a+b}{b-a}$ c) $\dfrac{b-a}{b}$

d) $\dfrac{ab}{a+b}$ e) $\dfrac{a^2+2ab}{b^2+2ab}$

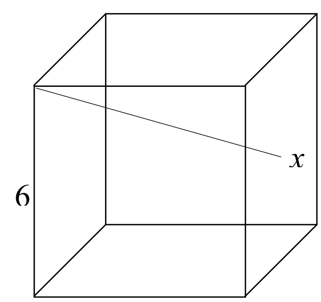



**[OPM 2001]**

**2.** La arista de un cubo tiene longitud 6. La distancia del punto medio $x$ de una de las caras del cubo a uno de los vértices de la cara opuesta es:

a) $6\sqrt{2}$ b) $4\sqrt{3}$ c) $2\sqrt{6}$

d) $3\sqrt{6}$ e) $6\sqrt{3}$

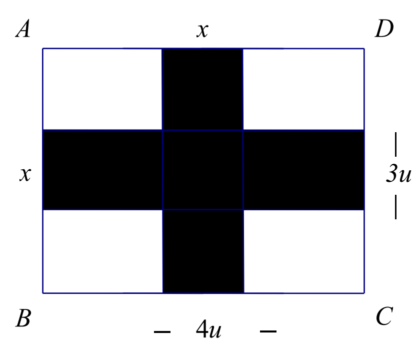



**[ONM 1998]**

**3.** Si el área de la región sombreada es la mitad del área del rectángulo $ABCD$, el valor de $x$ es:

a) 1 b) 2 c) 3

d) 6 e) Ninguna de las anteriores



**[ONM 1998]**

**4.** Veinte círculos están contenidos cada uno dentro del otro. El área de cada círculo es exactamente la mitad de la del círculo más próximo que lo contiene. Si la circunferencia del círculo mayor tiene longitud $16\pi$, el menor de los círculos tiene radio igual a:

a) $\sqrt{2}/128$ b) $1/64$ c) $\sqrt{2}/256$

d) $2\sqrt{10}/\pi$ e) Ninguna de las anteriores

**[ONM 1995]**

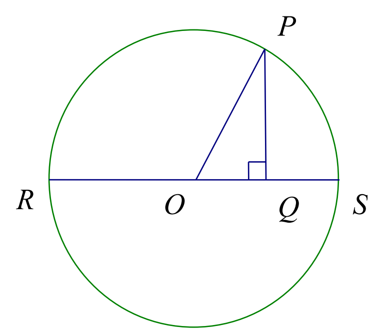
**5.** Las medidas de los ángulos de un cuadrilátero están en progresión aritmética y el menor de ellos mide 60º. El ángulo mayor mide:

a) $120^\circ$ b) $100^\circ$ c) $80^\circ$ d) $160^\circ$

e) Ninguna de los anteriores

**[ONM 1995]**

**6.** En la figura, el radio $\overline{OP}$ de la circunferencia mide 14 cm, y $Q$ es un punto en el diámetro $\overline{RS}$. Si $\dfrac{QS}{QR} = \dfrac{2}{5}$, el segmento $\overline{OQ}$ mide:

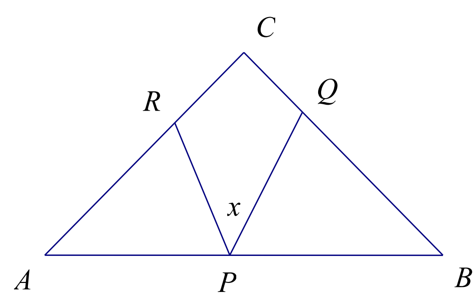



a) 6 cm b) 8 cm c) 10 cm

d) 5 cm e) Ninguna de las anteriores

**[ONM 1997]**

**7.** En el triángulo $ABC$ de la figura, el ángulo $\angle BCA$ es recto. Si $PB = QB$ y $AR = AP$ entonces el ángulo $x$ mide:




a) $90^\circ$ b) $60^\circ$ c) $45^\circ$

d) $30^\circ$ e) Ninguna de los anteriores

**[ONM 1996]**

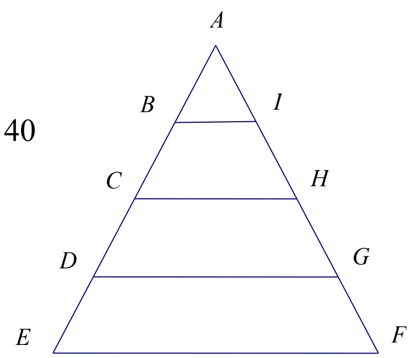
**8.** Una circunferencia de radio $r$ es tangente a los lados $\overline{AD}$, $\overline{BC}$, $\overline{AB}$ del rectángulo $ABCD$ y pasa por el punto medio de la diagonal $\overline{AC}$. El área del rectángulo en términos de $r$ es:

a) $4r^2$ b) $6r^2$ c) $8r^2$ d) $12r^2$

e) Ninguna de las anteriores

**[ONM 1996]**

**9.** En la figura, $AB = BC = CD = DE$ y $AI = IH = HG = GF$. Si el área del triángulo $\Delta AEF$ es 80, entonces el área del trapezoide $DEFG$ es:

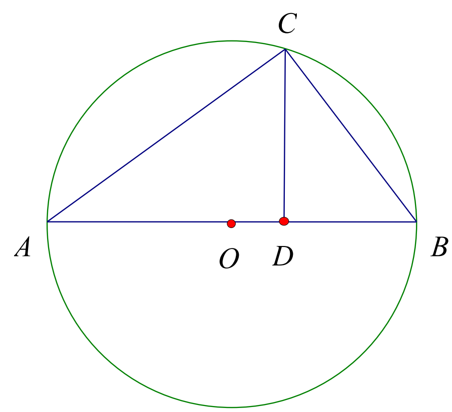



a) 25 b) 30 c) 35 d) 40

e) Ninguna de los anteriores

**[OPM 2001]**

**10.** Considere el triángulo $\Delta ABC$ donde $\overline{AB}$ es el diámetro de una circunferencia y $\overline{CD}$ es la altura del triángulo desde el vértice $C$, como se muestra en la figura. Si $AD = 25$ cm y $DB = 16$ cm, el área del triángulo $\Delta ABC$ en cm$^2$ es:

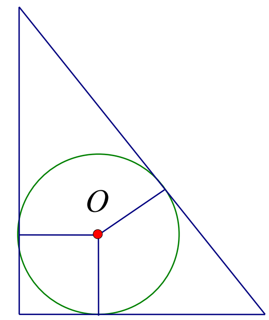



a) 250 b) 410 c) 200

d) 820 e) 400

**[OPM 2001]**

**11.** Los lados de un triángulo rectángulo $\Delta ABC$ miden 6 cm, 8 cm y 10 cm. El radio de la circunferencia inscrita en el triángulo $\Delta ABC$, mide en cm:




a) 4 b) 3 c) 2
d) $\frac{5}{2}$ e) $\frac{3}{2}$

**[OPM 2001]**

**12.** En el triángulo $\Delta ABC$, con el ángulo $\angle C$ recto, la altura $\overline{CH}$ y la mediana $\overline{CM}$ trisecan el ángulo recto. Si el área del triángulo $\Delta CMH$ es $k$, entonces el área del triángulo $\Delta ABC$ es:

a) $6k$ b) $4\sqrt{3}k$ c) $4k$ d) $3\sqrt{3}k$ e) $3k$

**[OPM 2002]**

**13.** La longitud del lado del cuadrado inscrito en un triángulo acutángulo de base 10 y altura 4 es:

a) $\frac{11}{7}$ b) $\frac{5}{2}$ c) $\frac{20}{7}$ d) 3 e) $\frac{10}{3}$

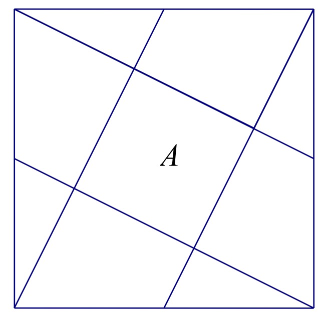
**[OPM 2002]**

**14.** Los centros de cuatro circunferencias de radio 4, están sobre los vértices de un cuadrado de lado 4. El área del cuadrilátero formado por los cuatro puntos interiores al cuadrado que son intersección de algún par de circunferencias es:

a) $\left(\sqrt{3}-1\right)^2$ b) $\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^2$ c) $8\left(\sqrt{3}-1\right)^2$ d) $8\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^2$ e) $\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)^2$

**[OPM 2002]**

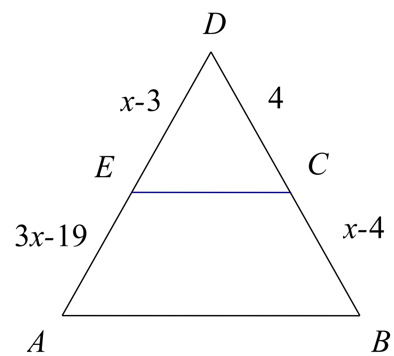
**15.** Dado un cuadrado cuyo lado tiene longitud 1, considere el cuadrado interior $A$ determinado uniendo cada vértice del cuadrado unitario con el punto medio de un lado no adyacente según la figura. El área de $A$ es:




a) 1/5 b) 1/4 c) 1/6
d) 2/5 e) 1/7

**[ONM 1995]**

**16.** En la figura, los valores de $x$ que cumplen la condición que el segmento $\overline{EC}$ es paralelo al segmento $\overline{AB}$ son:




a) 7 y 1 b) 11 y 8 c) 15/2 y 7
d) 8 y 6 e) Ninguna de las anteriores

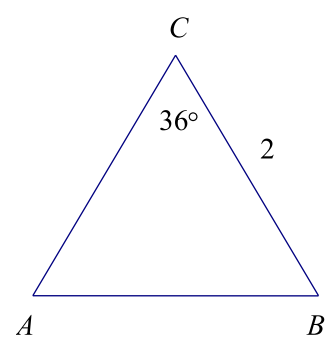
**[ONM 1995]**

**17.** El triángulo cuyos lados miden 6 cm, 5 cm y 4 cm es:

a) rectángulo b) acutángulo c) obtusángulo d) equiángulo

**[ONM 1995]**

**18.** La medida del ángulo del vértice $C$ de un triángulo isósceles es 36º y uno de los lados congruentes mide 2. El lado opuesto al vértice $C$ mide:



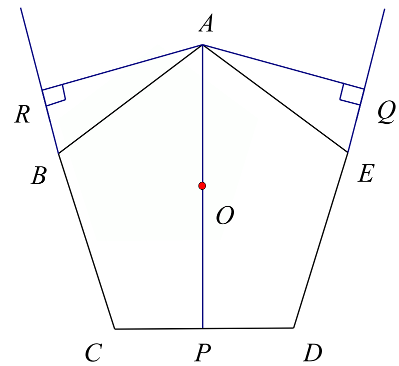

a) $\sqrt{5}$ b) $\sqrt{2}$ c) $\sqrt{5}$ - 1 d) 2
e) Ninguna de las anteriores

**[ONM 1998]**

**19.** $ABCDE$ es un pentágono regular y $\overline{AP}, \overline{AQ}, \overline{AR}$ son segmentos perpendiculares trazados desde $A$ a las rectas $\overleftrightarrow{CD}, \overleftrightarrow{DE}, \overleftrightarrow{CB}$ respectivamente. Sea $O$ el centro del pentágono. Si $OP = 1$, entonces

$$AO + AQ + AR$$

es igual a:




a) 3 b) $1+\sqrt{5}$ c) 4

d) $2+\sqrt{5}$ e) Ninguna de las anteriores

**[ONM 1995]**

**20.** Los cuatro lados de un cuadrilátero $ABCD$ son tangentes a una circunferencia y las longitudes de sus lados son $AB = a,\ BC = b,\ CD = c,\ DA = d$. El perímetro del cuadrilátero es:

a) $2(a+b)$ b) $2(a+c)$ c) $4a$ d) $2(c+d)$

e) Ninguna de las anteriores

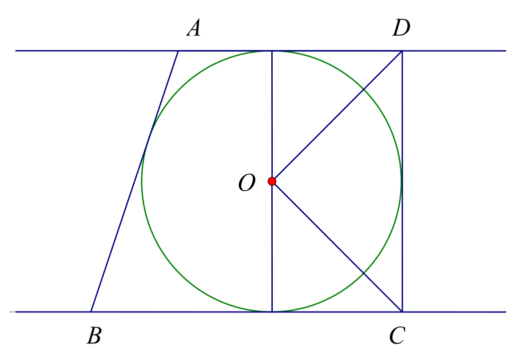
**[ONM 1995]**

**21.** Una circunferencia de centro $O$ está inscrita en un cuadrilátero $ABCD$. Si los lados $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ son paralelos, la magnitud del ángulo formado por los segmentos $\overline{OD}$ y $\overline{OC}$ es:

a) 90º b) 60º

c) 45º d) 30º

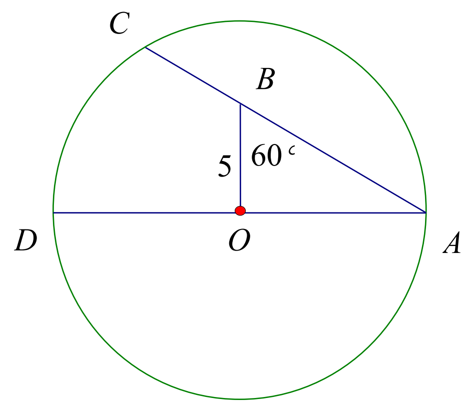
e) Ninguna de las anteriores



**[ONM 1998]**

**22.** En una circunferencia de centro $O$, $\overline{AD}$ es un diámetro, $\overline{AC}$ es una cuerda, $BO = 5$ y la medida del ángulo $\angle ABO$ y del arco $\overset{\frown}{CD}$ es 60º.

La longitud del segmento $\overline{BC}$ es:

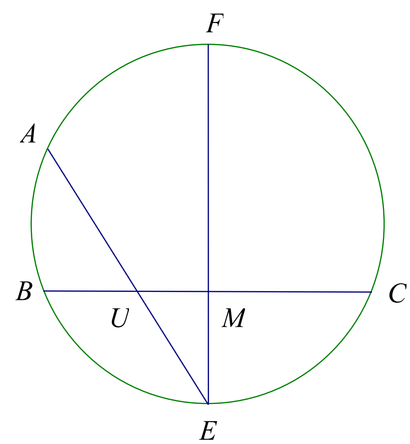



a) 3 b) $3+\sqrt{3}$ c) $5-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

d) 5 e) Ninguna de las anteriores

**[ONM 1998]**

**23.** La cuerda $\overline{EF}$ es la mediatriz de la cuerda $\overline{BC}$ y se interceptan en $M$. Entre los puntos $B$ y $M$ se toma un punto $U$ y $\overline{EU}$ se extiende hasta que intercepte a la circunferencia en un punto que designaremos $A$. Entonces, para cualquier escogencia del punto $U$ como se ha descrito, el triángulo $\Delta MUE$ es semejante al triángulo:

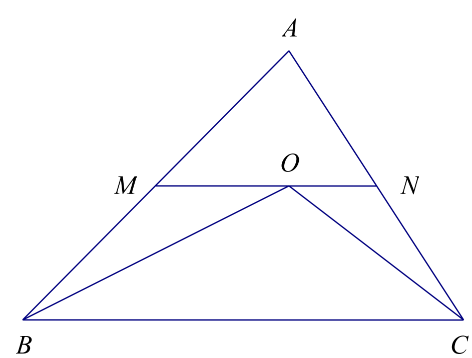



a) $\Delta ABM$ b) $\Delta CFE$ c) $\Delta ABC$

d) $\Delta EFA$ e) Ninguna de los anteriores

**[OPM 2001]**

**24.** En la figura $\overline{BO}$ biseca al ángulo $\angle ABC$, $\overline{CO}$ biseca al ángulo $\angle BCA$ y $\overline{MN}$ es paralelo a $\overline{BC}$. Si $AB = 12$, $BC = 24$ y $AC = 18$, entonces el perímetro del triángulo $\Delta AMN$ es:




a) 30 b) 33 c) 36

d) 39 e) 42

**[OPM 2001]**

**25.** Un cuadrado de lado de longitud 1 se gira 45º con respecto a uno de sus lados. Entonces el área común a los dos cuadrados mide en unidades cuadradas:

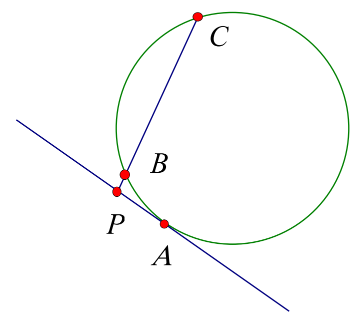
a) $2-\sqrt{2}$ b) $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $\sqrt{2}-1$ e) $\frac{3-2\sqrt{2}}{2}$

**[ONM 1997]**

**26.** Considérese la figura. Supongamos que la medida del arco $\overset{\frown}{BA}$ es $a$, la del arco $\overset{\frown}{CB}$ es $b$, y la del arco $\overset{\frown}{AC}$ es $c$ y estos números satisfacen la proporción:

$a:b:c=1:4:7$.

Además, las rectas $\overleftrightarrow{AP}$, $\overleftrightarrow{BC}$ son tangente y secante respectivamente a la circunferencia dada, entonces la medida del ángulo $\angle P$ es:

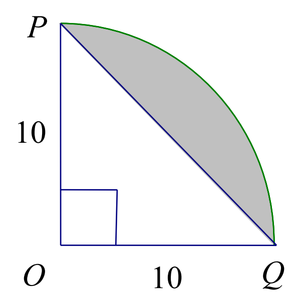



a) 180º b) 90º c) 60º d) 45º

e) Ninguna de los anteriores

**[ONM 1997]**

**27.** En la figura, $\overset{\frown}{QP}$ corresponde al arco de una circunferencia de radio 10. El área de la región sombreada es:

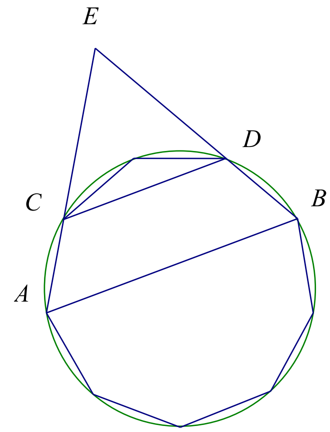



a) $50-25\pi$ b) $50\pi-50$ c) $25\pi-50$

d) $50\pi-100$ e) Ninguna de los anteriores

**[ONM 1997]**

**28.** Considere el nonágono regular en la figura, donde $\overline{AB}$ es una diagonal mayor y $\overline{CD}$ es una diagonal menor. Si por $A$ y $C$, $B$ y $D$ se trazan rectas que se interceptan en un punto $E$, los triángulos $\Delta CDE$ y $\Delta ABE$ son:

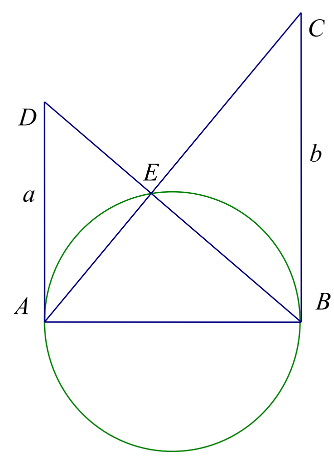



a) acutángulos b) rectángulos c) equiángulos

d) obtusángulos

**[ONM 1997]**

**29.** Sea $\overline{AB}$ el diámetro de una circunferencia. Se trazan rectas tangentes $\overleftrightarrow{AD}$ y $\overleftrightarrow{BC}$ por $A$ y $B$ respectivamente de tal manera que $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ se interceptan en un punto de la circunferencia. Si $AD = a$, $BC = b$, $a \neq b$, la longitud del diámetro de la circunferencia es:

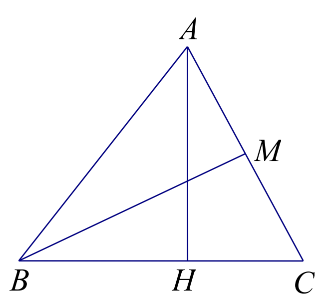



a) $|a-b|$ b) $\frac{1}{2}(a-b)$ c) $\sqrt{ab}$

d) $\dfrac{ab}{a+b}$ e) Ninguna de los anteriores.

**[OPM 2002]**

**30.** En el triángulo $\Delta ABC$, $m\angle A = 100º$, $m\angle B = 50º$, supongamos que $\overline{AH}$ es una altura del triángulo y $\overline{BM}$ es una mediana. Entonces la medida del ángulo $\angle MHC$ es:




a) 15.0º b) 22.5º c) 30.0º

d) 40.0º e) 45.0º

# Misceláneos - Problemas

# Problemas Misceláneos

**[ONM 1996]**

**1.** Si un tablero de ajedrez (64 cuadrados: 32 negros y 32 blancos) se descompone en $n$ rectángulos que no se traslapan y que cumplen las siguientes condiciones:

- todo rectángulo tiene igual número de cuadrados blancos que de negros
- si $a_i$ es el número de cuadrados negros en el rectángulo $i$-ésimo, entonces $a_1 < \cdots < a_n$ .

El máximo $n$ para que se cumpla esto es:

a) 6 b) 7 c) 8 d) 9
e) Ninguna de las anteriores

**[ONM 1996]**

**2.** La solución de la ecuación exponencial

$$7 \cdot 4^{x-2} + 5 \cdot 4^{x-1} - 3 \cdot 4^{x} - 2 \cdot 4^{x+1} - 9 = -158$$

es:

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4
e) Ninguna de las anteriores

**[ONM 1995]**

**3.** Si $\log_5(\log_2(\log_3 x)) = 0$, entonces $x^{-1/2}$ es:

a) $\frac{1}{2}$ b) 4 c) $\frac{1}{3}$ d) 9
e) Ninguna de las anteriores

**[OPM 2001]**

**4.** Se tienen 18 bolas del mismo tamaño y color, pero una de ellas pesa diferente. El número mínimo de comparaciones con una balanza para detectar con seguridad la bola diferente es:

a) 3 b) 4 c) 5 d) 6 e) 7

**[ONM 1998]**

**5.** Si $\tan\alpha$ y $\tan\beta$ son raíces de la ecuación $x^2 - px + q = 0$, $\cot\alpha$ y $\cot\beta$ son raíces de $x^2 - rx + s = 0$, entonces $rs$ es igual a:

a) $pq$ b) $\frac{1}{pq}$ c) $\frac{p}{q^2}$ d) $\frac{q}{p^2}$

e) Ninguna de las anteriores

**[OPM 2001]**

**6.** Al final de una reunión social entre amigos las damas se despiden del resto de damas y varones con un beso, mientras que los varones se despiden entre sí con un apretón de manos. Entendiendo que todos se saludaron y al final hubo 108 besos y 28 apretones de mano, entonces en la reunión, habían:

a) 14 damas y 8 varones b) 9 damas y 8 varones

c) 11 damas y 8 varones d) 9 damas y 14 varones

e) 8 damas y 14 varones

**[OPM 2001]**

**7.** Al lanzar un par de dados, la probabilidad de que la suma de los puntos no sea 7, ni 8, ni 9 es:

a) $\frac{5}{12}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{2}{3}$ d) $\frac{7}{12}$ e) $\frac{1}{3}$

**[OPM 2002]**

**8.** A un baile asistieron 25 personas. Ana bailó con 6 muchachos, Alma con 7, Nidia con 8, y así hasta llegar a la última muchacha la cual fue la única que bailó con todos los muchachos. El número de muchachos que había en el baile es:

a) 9 b) 10 c) 11 d) 12 e) 15

**[OPM 2002]**

**9.** Se tiene una balanza de dos platos y tres discos de 1, 2 y 5 libras respectivamente. ¿Cuántos objetos de diferentes pesos pueden balancearse, utilizando solamente estos discos, si los objetos y los discos se pueden colocar en cualquiera de los dos platos?

a) 6 b) 7 c) 8 d) 10 e) 13

**[OPM 2002]**

**10.** Un cubo, cuyas caras están pintadas, se ha dividido en mil cubos más pequeños de igual dimensión y se han mezclado en una bolsa. La probabilidad de que un cubo tomado al azar tenga exactamente dos caras pintadas es:

a) 0.008 b) 0.032 c) 0.064 d) 0.096 e) 0.12

**[OIM 2000]**

**11.** Se construye un polígono regular de $n$ lados ($n \geq 3$) y se enumeran sus vértices de 1 a $n$. Se trazan todas las diagonales del polígono. Demostrar que si $n$ es impar, se puede asignar a cada lado y a cada diagonal un número entero de 1 a $n$, tal que se cumplan simultáneamente las siguientes condiciones:

1. El número asignado a cada lado o diagonal sea distinto a los asignados a los vértices que une.
2. Para cada vértice, todos los lados y diagonales que compartan dicho vértice tengan números diferentes.

**[OM 1998]**

**12.** Inés eligió cuatro dígitos del conjunto $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Formó con ellos todos los posibles números de cuatro cifras distintas y sumó todos esos números de cuatro cifras. El resultado es 193314. Halle los cuatros dígitos que eligió Inés.

**[OMCC 2001]**

**13.** Dos jugadores $A$, $B$ y otras 2001 personas forman un círculo, de modo que $A$ y $B$ no quedan en posiciones consecutivas. $A$ y $B$ juegan por turnos alternadamente empezando por $A$. Una jugada consiste en tocar a una de las personas que se encuentra a su lado, la cual debe salir del círculo. Gana el jugador que logre sacar del círculo a su oponente.

Demostrar que uno de los dos jugadores tiene una estrategia ganadora y describir dicha estrategia.

*Nota*: Un jugador tiene una estrategia ganadora si puede garantizar su victoria sin importar cómo juegue su rival.

# Álgebra - Soluciones

# Problemas de Álgebra - Soluciones

**1.** Sean $a$, $b$ números enteros tales que $x^2 - x - 1$ es factor de $ax^3 + bx^2 + 1$. El valor de $b$ es:

a) $-2$ b) $-1$ c) 0 d) 1 e) 2

### Solución

Como $x^2 - x - 1$ es un factor de $ax^3 + bx^2 + 1$, el otro factor es lineal, digamos $x - d$.

Al dividir $ax^3 + bx^2 + 1$ por $x - d$ el cociente es $x^2 - x - 1$ y de aquí podemos, aplicando división sintética, deducir el valor de $b$. En efecto, por división sintética $a = 1$, $b + d = -1$, $-d = -1$ y se tiene que $b = -2$. Ver tabla abajo.

$$\begin{array}{c|cccc} d & a & b & 0 & 1 \\ \hline & & d & -d & -1 \\ \hline & 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}$$

La respuesta correcta es la alternativa (**a**).

**2.** Se da una progresión geométrica (de razón racional no entera) de cinco términos, cada uno de los cuales es un entero positivo menor que 100. La suma de los cinco términos es 211. Si $S$ es la suma de aquellos términos de la progresión que son cuadrados de enteros, entonces $S$ es igual a:

a) 0 b) 91 c) 133 d) 195

e) Ninguna de las anteriores

### Solución

Sea $u$ el tercer término de la progresión y $r = \dfrac{c}{d}$ con $\operatorname{mcd}(c,d) = 1$, la razón común. Entonces,

$$\frac{u}{r^2} + \frac{u}{r} + u + ur + ur^2 = \frac{ud^2}{c^2} + \frac{ud}{c} + u + \frac{uc}{d} + \frac{uc^2}{d^2} = 211 .$$

Como cada término es entero, tanto $c^2$ como $d^2$ deben dividir a $u$. Por lo tanto, $u = kc^2 d^2$. Reemplazando $u$ en la suma anterior obtenemos:

$$k(d^4 + d^3c + d^2c^2 + dc^3 + c^4) = 211.$$

Pero, 211 es primo y necesariamente $k = 1$. Luego,

$$d^4 + d^3c + d^2c^2 + dc^3 + c^4 = 211.$$

Esta suma nos dice que los enteros $c$ y $d$ no pueden ser mayores o iguales que 4, ya que

$$4^4 = 256 > 211.$$

Tampoco pueden ser la unidad, ya que si por ejemplo $c$ lo fuese, tendríamos que

$$d^4 + d^3 + d^2 + d + 1 = \frac{d^5 - 1}{d - 1} = 211.$$

Pero si $d = 2$, el lado izquierdo sería igual a $32 \neq 211$ y si $d = 3$ el lado izquierdo sería $121 \neq 211$. En conclusión como $c$ y $d$ son primos relativos la única posibilidad es que uno sea 2 y el otro 3.

Escojamos $c = 3$ y $d = 2$,

$$2^4 + 3 \cdot 2^3 + 3^2 \cdot 2^2 + 3^3 \cdot 2 + 3^4 = 211$$

y $u = 36$. Nótese que $r$ puede tomar el valor $\frac{3}{2}$ ó $\frac{2}{3}$ y se obtiene el mismo resultado pero en orden inverso. Los términos de la progresión son:

16, 24, 36, 54 y 81.

La suma de los cuadrados de números naturales es

$$4^2 + 6^2 + 9^2 = 133.$$

La respuesta correcta es la alternativa (**c**).

**3.** Sea $f$ una función definida en el conjunto de los números naturales que verifica las siguientes propiedades para todo $m$, $n$:
$f(nm) = f(n) + f(m)$;
$f(5) = f(10) = 0$ y
$f(n) = 0$ si el dígito de las unidades de $n$ es 3.

El valor de $f(59286)$ es:

a) 0 b) 2 c) 3 d) 41 e) 82

### Solución

Observemos que $59286 = 2 \cdot 29643$ y por lo tanto:

$$\begin{aligned} f(59286) &= f(2 \cdot 29643) \\ &= f(2) + f(29643) \\ &= f(2) + 0 \\ &= f(2) + f(5) \\ &= f(10) \\ &= 0\,. \end{aligned}$$

La respuesta correcta es la alternativa (**a**).

**4.** Un factor de $x^4 + 4$ es:

a) $x + 2$ b) $x^2 + 2$ c) $x^2 - 2x + 2$ d) $x^2 - 2x - 2$
e) Ninguna de las anteriores

### Solución

Basta observa que

$$\begin{aligned} x^4 + 4 &= x^4 + 4x^2 - 4x^2 + 4 \\ &= (x^2)^2 + 4x^2 + 4 - 4x^2 \\ &= (x^2 + 2)^2 - 4x^2 \\ &= (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2)\,. \end{aligned}$$

La respuesta correcta es la alternativa (**c**).

**5.** Los valores de $y$ que satisfacen el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2x^2 + 6x + 5y + 1 = 0 \\ \qquad 2x + y + 3 = 0 \end{cases}$$

pueden encontrarse resolviendo la ecuación:

a) $y^2 + 14y - 7 = 0$ b) $y^2 + 10y - 7 = 0$

c) $y^2 + 8y - 1 = 0$ d) $y^2 + y - 12 = 0$

e) Ninguna de las anteriores

### Solución

Considérese el sistema dado:

$$\begin{cases} 2x^2 + 6x + 5y + 1 = 0 \\ \qquad 2x + y + 3 = 0\,. \end{cases}$$

Despejando $x$ en la segunda ecuación

$$x = -\frac{(3+y)}{2}$$

y reemplazándola en la primera obtenemos

$$2\left[-\frac{3+y}{2}\right]^2 + 6\left[-\frac{3+y}{2}\right] + 5y + 1 = 0$$

$$2\left[\frac{9+6y+y^2}{4}\right] + 6\left[-\frac{3+y}{2}\right] + 5y + 1 = 0$$

$$\left[\frac{9+6y+y^2}{2}\right] + 3[-(3+y)] + 5y + 1 = 0$$

$$9 + 6y + y^2 + 6\,[-(3+y)] + 10y + 2 = 0$$

$$y^2 + 10y - 7 = 0\,.$$

La respuesta correcta es la alternativa (**b**).

**6.** Sea $f$ una función real tal que:

$$f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = x\,,$$

entonces:

a) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$ b) $f(x-1) = \dfrac{x+1}{x}$ c) $f\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right) = \dfrac{1}{x}$

d) $f(x+1) = x(x-1)$ e) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$

### Solución

Hagamos

$$\frac{x+1}{x-1} = t\,.$$

Luego,

$$\begin{aligned} x+1 &= t(x-1) \\ x+1 &= tx-t \\ t+1 &= tx-x \\ t+1 &= x(t-1) \\ x &= \frac{t+1}{t-1}. \end{aligned}$$

Así

$$f(x) = f\left(\frac{t+1}{t-1}\right) = t = \frac{x+1}{x-1}.$$

La respuesta correcta es la alternativa (**e**).

**7.** La sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ está definida por

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = a_n + 2n, \quad n \geq 1 \end{cases}$$

entonces $a_{100}$ es igual a:

a) 9900 b) 9902 c) 9904 d) 10100

e) Ninguna de las anteriores

## Solución

Calculemos los primeros términos de la sucesión. Por definición, $a_1 = 2$. Luego,

$$\begin{aligned} a_{1+1} &= a_1 + 2(1) = 2 + 2(1) &&= 2(1+1) \\ a_{2+1} &= a_2 + 2(2) = 4 + 2(2) &&= 2(1+1+2) \\ a_{3+1} &= a_3 + 2(3) = 2(1+1+2) + 2(3) &&= 2(1+1+2+3)\,. \end{aligned}$$

En general,

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 2(1+1+2+\cdots+n) \\ &= 2\left(1+\frac{n(n+1)}{2}\right) \end{aligned}$$

y por lo tanto,

$$a_{99+1} = 2\left(1+\frac{99(99+1)}{2}\right) = 9902\,.$$

La respuesta correcta es la alternativa (**b**).

**8.** Supongamos que $x$, $y$ son números reales tales que $|x| \neq |y|$. Supongamos además, que $x$ e $y$ satisfacen las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} x^3 &= 13x + 3y \\ y^3 &= 3x + 13y\,. \end{aligned}$$

Entonces $(x^2 - y^2)^2$ es igual a:

a) 26 b) 61 c) 133 d) 160

e) Ninguna de las anteriores

## Solución

Nótese que

$$x^3 + y^3 = 16x + 16y = 16(x+y)$$

y que

$$x^3 - y^3 = 10x - 10y = 10(x-y).$$

Consecuentemente,

$$(x+y)(x^2 - xy + y^2) = 16(x+y)$$
$$(x-y)(x^2 + xy + y^2) = 10(x-y)$$

y como $|x| \neq |y|$, es que

$$x^2 - xy + y^2 = 16$$
$$x^2 + xy + y^2 = 10.$$

Sumando y reemplazando tenemos que:

$$x^2 + y^2 = 13$$
$$xy = -3.$$

De lo anterior,

$$(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2 = 19$$
$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 = 7.$$

Por lo cual,

$$(x^2 - y^2)^2 = (x-y)^2 (x+y)^2 = 19 \cdot 7 = 133.$$

La respuesta correcta es la alternativa (**c**).

**9.** Sea $S$ el subconjunto de números reales, definido por $S = \{\, a + b\sqrt{2} \;/\; a, b \in \mathbb{Q} \,\}$. El inverso multiplicativo del número no nulo $a + b\sqrt{2}$ es:

a) $\dfrac{a + b\sqrt{2}}{a^2 + 2b^2}$ b) $\dfrac{a - b\sqrt{2}}{a^2 - 2b^2}$ c) $\dfrac{a - b\sqrt{2}}{a^2 + 2b^2}$

d) $\dfrac{a + b\sqrt{2}}{a^2 - 2b^2}$ e) $\dfrac{\sqrt{2}}{2a + b\sqrt{2}}$

### Solución

Basta observar que:

$$\frac{1}{a+b\sqrt{2}} = \frac{1}{a+b\sqrt{2}} \cdot \frac{a-b\sqrt{2}}{a-b\sqrt{2}} = \frac{a-b\sqrt{2}}{a^2-2b^2}.$$

La respuesta correcta es la alternativa (**b**).

**10.** Si $a+b=1$ y $a^2+b^2=2$, entonces $a^3+b^3$ es igual a:

a) 9 b) 5 c) $\frac{7}{2}$ d) 3 e) $\frac{5}{2}$

### Solución

Si $a + b = 1$ entonces,

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = 1.$$

Como $a^2 + b^2 = 2$,

$$(a+b)^2 = 2 + 2ab = 1,$$

de donde,

$$ab = -1/2.$$

Luego,

$$a^3 + b^3 = (a+b)\,(a^2 - ab + b^2) = (1)\,\left(2 + 1/2\right) = 5/2.$$

La respuesta correcta es la alternativa (**e**).

**11.** La cantidad de pares distintos de números enteros $(x, y)$ que satisfacen las ecuaciones

$$\begin{cases} x = x^2 + y^2 \\ y = 2xy \end{cases}$$

es:

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4

e) Ninguna de las anteriores

### Solución

Consideremos el sistema

$$\begin{cases} x = x^2 + y^2 \\ y = 2xy\,. \end{cases}$$

Como $y = 2xy$, asumiendo que $y \neq 0$ se obtiene que $2x = 1$, por lo que $x = 1/2$. Luego,

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{4} + y^2$$

de donde $y = \pm 1/2$.

Si $y = 0$, en la primera ecuación se tiene que $x = 0$ ó $x = 1$ Por lo tanto, todas las soluciones del sistema son $(0,0), (\frac{1}{2},\frac{1}{2}), (\frac{1}{2},-\frac{1}{2}), (1,0)$.

La respuesta correcta es la alternativa (**b**).

**12.** El número de funciones polinomiales que satisfacen $f(x^2) = [f(x)]^2 = f(f(x))$ es:

a) 3 b) 2 c) 1 d) 0

e) Ninguna de las anteriores

### Solución

Sea

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k x^k$$

una función polinomial de grado *n*. Se requiere que:

$$f(x^2) = [f(x)]^2 = f(f(x))$$

por lo cual,

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^{2k} = \left[\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right]^2 = \sum_{k=0}^{n} a_k \left(\sum_{j=0}^{n} a_j x^j\right)^k .$$

Igualando los términos principales, ya que $a_n \neq 0$

$$a_n x^{2n} = a_n{}^2 x^{2n} = a_n{}^{n+1} x^{n^2} .$$

O sea,

$$2n = n^2 \quad \text{y} \quad a_n = a_n{}^2 = a_n{}^{n+1} .$$

La igualdad $2n = n^2$ implica que $n = 0$ ó $n = 2$. Si $a_n = a_n{}^2 = a_n{}^{n+1}$, entonces como $a_n \neq 0$, es que $a_n = 1$. Se deduce que

$$f(x) = k \qquad \text{ó} \qquad f(x) = x^2 + bx + c .$$

Si $f(x) = k$, como $k = k^2$ es que $k = 0$ ó $k = 1$ y por tanto,

$$f(x) = 0 \ \text{ ó } \ f(x) = 1 .$$

Si $f(x) = x^2 + bx + c$, como

$$\begin{aligned}(x^2 + bx + c)^2 &= x^4 + 2bx^3 + (b^2 + 2c)x^2 + 2bcx + c^2 \\ &= x^4 + bx^2 + c\end{aligned}$$

se deduce que $b = 0$ y al ser $2c = b$, $c = 0$. Por lo tanto,

$$f(x) = x^2 .$$

La respuesta correcta es la alternativa (**a**).

**13.** Tres números cuya suma es 93, forman una progresión geométrica de razón distinta de 1. Ellos son el primero, segundo y séptimo término de una progresión aritmética. El primer término de la progresión geométrica es:

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4

e) Ninguna de las anteriores

### Solución

Sea $a_1, a_2, a_{3,} \ldots$ la progresión aritmética, luego $a_1 = u$, $a_2 = ur$, $a_7 = ur^2$.

Por definición,

$$d = a_2 - a_1 = ur - u$$

y

$$6d = a_7 - a_1 = ur^2 - u = u(r^2 - 1).$$

Luego,

$$6u(r-1) = u(r^2 - 1)$$

y como $u \neq 0$

$$6(r-1) = r^2 - 1.$$

De lo anterior se obtiene,

$$r^2 - 6r + 5 = (r-1)(r-5) = 0$$

Pero al ser $r \neq 1$, la condición

$$u + ur + ur^2 = 93$$

nos dice que $u$ es 3.

La respuesta correcta es la alternativa (**c**).

**14.** Si $a + b + c = 0$, entonces $a^3 + b^3 + c^3$ es igual a:

a) $0$ b) $-a^2 - b^2 - c^2$ c) $6abc$ d) $a^2 + b^2 + c^2$ e) $3abc$

### Solución

Considérese la expresión:

$$(a^3 + b^3 + c^3) - 3abc$$

Como $a + b + c = 0$, entonces $c = -(a+b)$, reemplazando

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 - (a+b)^3 + 3ab(a+b) &= a^3 + b^3 - (a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2) + 3a^2b + 3ab^2 \\ &= a^3 + b^3 - a^3 - b^3 - 3a^2b - 3ab^2 + 3a^2b + 3ab^2 \\ &= 0. \end{aligned}$$

La respuesta correcta es la alternativa (**e**).

**15.** Considérese la expresión

$$a^2\,\frac{(d-b)(d-c)}{(a-b)(a-c)}+b^2\,\frac{(d-c)(d-a)}{(b-c)(b-a)}+c^2\,\frac{(d-a)(d-b)}{(c-a)(c-b)}$$

Al simplificarla obtenemos:

a) $a^2$ b) $b^2$ c) $c^2$ d) $d^2$

e) Ninguna de las anteriores

**Solución**

Defínase un polinomio $P$ por :

$$P(x)=a^2\,\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+b^2\,\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+c^2\,\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}.$$

Este polinomio es de grado a lo sumo 2.

Nótese que

$$P(a)=a^2\,\frac{(a-b)(a-c)}{(a-b)(a-c)}=a^2\ .$$

Análogamente:

$$P(b)=b^2 \quad \text{y} \quad P(c)=c^2\ .$$

Si el polinomio $Q$ se define por $Q(x)=x^2$, entonces como $P$ es de grado a lo sumo 2 y ambos polinomios coinciden en tres valores, es que $P=Q$. Luego, $P(d)=d^2$.

La respuesta correcta es la alternativa (**d**).

**16.** Si $x<-2$ entonces $|\,1-|\,1+x\,|\,|$ es igual a:

a) $2+x$ b) $-(2+x)$ c) $x$ d) $-x$ e) $-2$

### Solución

Si $x < -2$, entonces

$$|1+x| = -(1+x).$$

Luego,

$$\begin{aligned} \big|1-|1+x|\big| &= |1+(1+x)| \\ &= |2+x| \\ &= -(2+x), \quad \text{porque } x < -2. \end{aligned}$$

La respuesta correcta es la alternativa (**b**).

**17.** Un polinomio de grado 3 en la indeterminada $x$ es tal que el coeficiente de $x^2$ es menor en 3 unidades que el coeficiente de $x^3$. El coeficiente de $x$ es tres veces el coeficiente de $x^2$ y el coeficiente restante es mayor en dos unidades que el coeficiente de $x^3$. La suma de los coeficientes es $-4$. Si el polinomio se multiplica por $2x+1$ se obtiene:

a) $2x^4+3x^3-14x^2+3$  b) $2x^4-3x^3-14x^2+3$

c) $2x^4-3x^3+14x^2+3$  d) $2x^4+3x^3-14x^2-3$

e) Ninguna de las anteriores

### Solución

Sea $P(x)$ el polinomio del problema y denotemos por $a$ el coeficiente de $x^3$ en $P(x)$. En base a la información suministrada tenemos:

$$P(x) = ax^3 + (a-3)x^2 + 3(a-3)x + (a+2)$$

y

$$a + (a-3) + 3(a-3) + (a+2) = -4.$$

Resolviendo la ecuación obtenemos $a = 1$. El polinomio es por lo tanto

$$P(x) = x^3 - 2x^2 - 6x + 3.$$

Multiplicando por $2x + 1$ resulta

$$2x^4 - 3x^3 - 14x^2 + 3.$$

La respuesta correcta es la alternativa (**b**).

**18.** La suma de los tres primeros términos de una progresión geométrica es igual a 6, y la suma del segundo, tercero y cuarto término es igual a (–3). El quinto término de la progresión es:

a) $-\frac{1}{2}$ b) $-1$ c) $\frac{1}{2}$ d) 1

e) Ninguna de las anteriores

### Solución

Sea $a_1, a_2, a_3, \ldots$ la progresión geométrica buscada. Entonces

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 &= 6 \\ a_2 + a_3 + a_4 &= -3. \end{aligned}$$

En términos del primer elemento de la progresión, si $r$ es la razón común, obtenemos:

$$\begin{aligned} a_1 + a_1 r + a_1 r^2 &= 6 \\ a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 &= -3. \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} a_1(1 + r + r^2) &= 6 \\ a_1 r(1 + r + r^2) &= -3. \end{aligned}$$

Dividiendo obtenemos,

$$\frac{a_1 r(1 + r + r^2)}{a_1(1 + r + r^2)} = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2} = r.$$

Como

$$a_1 = \frac{6}{1+r+r^2} = \frac{6}{3/4} = 8$$

la progresión que buscamos es $8, -4, 2, -1, 1/2, \dots$ .

La respuesta correcta es la alternativa (**c**).

**19.** Una sucesión de números $a_1, a_2, \cdots$ está definida por:

$$\begin{cases} a_1 = -5 \\ a_2 = \ \ 4 \\ a_n = \ \ a_{n-1} - a_{n-2}, \quad n \geq 3 \end{cases}$$

El término 149 de la sucesión es:

a) $-9$ b) $-5$ c) $-4$ d) $5$

e) Ninguna de las anteriores

### Solución

De acuerdo con la definición,

$$\begin{aligned} a_1 &= -5 \\ a_2 &= \ \ 4 \\ a_3 &= \ \ 4-(-5) &&= \ \ 9 \\ a_4 &= \ \ 9-4 &&= \ \ 5 \\ a_5 &= \ \ 5-9 &&= -4 \\ a_6 &= \ -4-5 &&= -9 \\ a_7 &= \ -9-(-4) &&= -5 \\ a_8 &= \ -5-(-9) &&= \ \ 4\,. \end{aligned}$$

Se observa que a partir del término $a_7$ los valores se repiten. En general, $a_{n+6} = a_n$ .

El valor de $a_n$ se determina así: si $n$ es un múltiplo de 6, $a_n = a_6$, si este no es el caso, $a_n = a_r$ donde $r$ es el residuo de la división de $n$ por 6.

Como

$$149 = (24)\cdot 6 + 5,$$

es que

$$a_{149} = a_5 = -4\,.$$

La respuesta correcta es la alternativa (**c**).

**20.** El conjunto solución del sistema:

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= a + b + c \\ bx + cy + az &= a + b + c \\ cx + ay + bz &= a + b + c \end{aligned}$$

en donde $a$, $b$, $c$ son números reales distintos y $a + b + c \neq 0$ es:

a) vacío b) unitario c) finito no unitario

d) infinito

## Solución

Nótese que el conjunto solución del sistema dado no es vacío ya que

$$x = y = z = 1$$

es una solución. Estableceremos que ésta es la única solución. En efecto,

$$\begin{aligned} (ax + by + cz) + (bx + cy + az) + (cx + ay + bz) &= 3(a + b + c) \\ (a + b + c)(x + y + z) &= 3(a + b + c)\,. \end{aligned}$$

Como $a + b + c \neq 0$ se tiene que

$$x + y + z = 3\,.$$

Pongamos a $z$ en función de $x$ e $y$. Entonces:

$$\begin{aligned} ax + by + c(3 - x - y) &= a + b + c \\ bx + cy + a(3 - x - y) &= a + b + c\,. \end{aligned}$$

Se obtiene:

$$\begin{aligned}(a-c)x+(b-c)y &= a+b-2c\\(b-a)x+(c-a)y &= -2a+b+c\,.\end{aligned}$$

El anterior es un sistema de ecuaciones en dos variables que puede ser resuelto por cualquier método conocido. En particular,

$$\begin{aligned}(c-a)(a-c)x+(c-a)(b-c)y &= (c-a)(a+b-2c)\\(c-b)(b-a)x+(c-b)(c-a)y &= (c-b)(-2a+b+c)\,.\end{aligned}$$

Sumando ambas ecuaciones se tiene que

$$[-(a-c)^2+(b-a)(c-b)]x=(c-a)(a+b-2c)+(c-b)(-2a+b+c)\,.$$

Pero,

$$\begin{aligned}-(a-c)^2+(b-a)(c-b) &= -a^2-b^2-c^2+ac+ab+bc\\(c-a)(a+b-2c)+(c-b)(-2a+b+c) &= -a^2-b^2-c^2+ac+ab+bc\end{aligned}$$

por lo cual $x=1$. Se deduce del sistema de ecuaciones en 2 variables que $y=1$ y por lo tanto $z = 1$.

La respuesta correcta es la alternativa (**b**).

**Nota**: La condición $a\neq b\neq c$ es necesaria. Si $a=b=c$, el sistema se reduce a $x+y+z=3$, lo que implica que el sistema admite infinitas soluciones.

En la expresión $-a^2-b^2-c^2+ac+ab+bc$, la presencia de los términos $ac, ab$ y $bc$, $a^2, b^2$ y $c^2$ nos hacen pensar en desarrollos de la forma $(a-b)^2, \left(b-c\right)^2$ y $(a-c)^2$.

En efecto,

$$\begin{aligned}-a^2-b^2-c^2+ac+ab+bc &= (-\tfrac{1}{2})[a^2-2ac+c^2+b^2-2bc+c^2+a^2-2ab+b^2]\\&= (-\tfrac{1}{2})[(a-c)^2+(b-c)^2+(a-b)^2]\,.\end{aligned}$$

Se tiene entonces que si $a\neq b\neq c$, la solución es única.

**21.** Dos velas del mismo tamaño se encienden simultáneamente. La primera se consume en 4 horas y la segunda en 3 horas. Asumiendo que cada vela se quema a razón constante, ¿cuántas horas después de encenderse las velas, estuvo la primera al doble de la altura de la segunda?

a) $\frac{3}{4}$ hora  b) $1\frac{1}{2}$ horas  c) 2 horas  d) $2\frac{2}{5}$ horas

e) Ninguna de los anteriores

### Solución

Supongamos para simplificar, que las velas tienen altura 1. La primera se consume en 4 horas, y por lo tanto su altura en el tiempo $t$ está dada por

$$1-\frac{1}{4}t\,.$$

Análogamente, la altura de la segunda vela en el tiempo $t$ es

$$1-\frac{1}{3}t\,.$$

Luego, por las condiciones del problema tenemos que:

$$1-\frac{1}{4}t=2\left(1-\frac{1}{3}t\right).$$

Y simplificando,

$$\frac{5}{12}t=1\,.$$

por lo que $t=2\frac{2}{5}$ horas.

La respuesta correcta es la alternativa (**d**).

**22.** Si $x$ es un número real y si $4y^2 + 4xy + x + 6 = 0$, entonces $y$ es un número real para los $x$ tales que:

a) $x \leq -2$ ó $x \geq 3$    b) $x \leq 2$ ó $x \geq 3$

c) $x \leq -3$ ó $x \geq 2$    d) $-3 \leq x \leq 2$    e) $-2 \leq x \leq 3$

### Solución

La ecuación dada es cuadrática en $y$. Para garantizar que los valores de $y$ sean reales basta que el discriminante $D$ sea mayor o igual que cero. Como,

$$D = (4x)^2 - 4(4)(x + 6) = 16(x^2 - x - 6) = 16(x - 3)(x + 2)$$

es necesario que

$$(x - 3)(x + 2) \geq 0$$

de donde

$$x \geq 3 \quad \text{ó} \quad x \leq -2 \,.$$

La respuesta correcta es la alternativa (**a**).

**23.** Si las soluciones de la ecuación $x^2 + px + q = 0$ son el cubo de las soluciones de la ecuación $x^2 + mx + n = 0$ entonces:

a) $p = m^3 + 3mn$    b) $p = m^3 - 3mn$    c) $p + q = m^3$

d) $\left(\frac{m}{n}\right)^3 = \frac{p}{q}$    e) $m^3 + n^3 = p$

## Solución

Sean $x_1, x_2$ las soluciones de

$$x^2 + px + q = 0$$

$y_1, y_2$ las soluciones de

$$x^2 + mx + n = 0 .$$

Sabemos que

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= -p \qquad & y_1 + y_2 &= -m \\ x_1 x_2 &= q & y_1 y_2 &= n \end{aligned}$$

pero

$$x_1 = y^3{}_1 \qquad x_2 = y^3{}_2 .$$

Luego,

$$-p = y^3{}_1 + y^3{}_2$$

y

$$\begin{aligned} -m^3 &= (y_1 + y_2)^3 \\ &= (y^3{}_1 + y^3{}_2) + 3y^2{}_1 y_2 + 3y_1 y^2{}_2 \\ &= -p + 3y_1 y_2 (y_1 + y_2) \\ &= -p + 3n\,(-m) \\ &= -p - 3mn . \end{aligned}$$

Entonces,

$$m^3 = p + 3mn$$

o sea,

$$m^3 - 3mn = p .$$

La respuesta correcta es la alternativa (**b**).

**24.** La función $f$ está definida en el conjunto de los números enteros por:

$$f(n) = \begin{cases} n-3, & \text{si } n \geq 1000 \\ f(f(n+5)), & \text{si } n < 1000. \end{cases}$$

Entonces $f(84)$ es igual a:

a) 81 b) 997 c) 998 d) 1001

e) Ninguna de las anteriores

### Solución

Estudiemos el comportamiento de la función para valores cercanos a 1000.

$$\begin{aligned} f(1001) &= 998 \\ f(1000) &= 997 \\ f(999) &= f(f(1004)) = f(1001) = 998 \\ f(998) &= f(f(1003)) = f(1000) = 997 \\ f(997) &= f(f(1002)) = f(999) = 998 \\ f(996) &= f(f(1001)) = f(998) = 997 \\ f(995) &= f(f(1000)) = f(997) = 998. \end{aligned}$$

Lo anterior nos permite conjeturar:

$$f(n) = \begin{cases} 997, \text{ si } n \text{ es par menor que } 1000 \\ 998, \text{ si } n \text{ es impar menor que } 1000. \end{cases}$$

Dado que $f(n)$ está relacionado con $f(n+5)$, para comprobar lo anterior basta considerar $f(n+5)$, para $n+5<1000$. Procedemos por inducción. Asumamos el resultado cierto para todo $m$, $n<m<1000$. Ya calculamos $f(999), f(998), f(997), f(995)$. Ahora para $n<995$,

$$f(n) = f(f(n+5)) = \begin{cases} f(997) = 998, \text{ si } n+5 \text{ es par} \\ f(998) = 997, \text{ si } n+5 \text{ es impar}. \end{cases}$$

Note que si $n$ es par, $n+5$ es impar y si $n$ es impar $n+5$ es par. Por lo tanto:

$$f(84) = 997.$$

La respuesta correcta es la alternativa (**b**).

**25.** Sea $\mathbb{N}$ el conjunto de los números naturales. La función $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, definida por $f(n) = 3^n - 2^n$, para $n \in \mathbb{N}$, es:

a) sobreyectiva, no inyectiva

b) inyectiva, no sobreyectiva

c) biyectiva

d) no inyectiva, no sobreyectiva

### Solución

La función no es sobreyectiva ya que $3^n - 2^n$ es impar para todo $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, los números pares no son imagen de ningún elemento de $\mathbb{N}$. Es inyectiva puesto que los números 3 y 2 son primos relativos y en consecuencia $3^n$ y $2^n$ no tienen factores comunes.

La respuesta correcta es la alternativa (**b**).

**26.** Si $a, b, c$ y $d$ son números reales no nulos tales que $c$ y $d$ son solución de la ecuación $x^2 + ax + b = 0$ y $a$, $b$ son solución de $x^2 + cx + d = 0$ entonces $a + b + c + d$ es igual a:

a) $\dfrac{-1+\sqrt{2}}{2}$ b) -2 c) 2 d) 4

e) Ninguna de las anteriores

### Solución

Como $c$ y $d$ son soluciones de la ecuación cuadrática $x^2 + ax + b = 0$, entonces:

$$c + d = -a$$
$$cd = b.$$

Análogamente,

$$a + b = -c$$
$$ab = d.$$

Por lo tanto,

$$a + b + c = a + c + d = 0$$

de donde, $d = b$. Pero como $ab = d$ y $cd = b$ se tiene que $a = 1$, $c = 1$, por lo que

$$b = d = -2.$$

En vista de lo anterior,

$$a + b + c + d = 1 - 2 + 1 - 2 = -2.$$

La respuesta correcta es la alternativa (**b**).

**27.** Si $a > -1$, el conjunto solución de la inecuación

$$(x-a)^2 < x(x+2) - a$$

es el subconjunto de los números reales $x$ tales que:

a) $x < \frac{a}{2}$ b) $x < -\frac{a}{2}$ c) $x > \frac{a}{2}$ d) $x > -\frac{a}{2}$

e) Ninguna de las anteriores

### Solución

La inecuación se desarrolla y obtenemos

$$x^2 - 2ax + a^2 < x^2 + 2x - a.$$

Factorizando

$$a(a+1) < 2x(a+1).$$

Como $a > -1$, lo anterior es equivalente a

$$a < 2x$$

y por lo tanto el conjunto solución es

$$\left\{ x \in \mathbb{R} / x > \frac{a}{2} \right\}.$$

La respuesta correcta es la alternativa (**c**).

**28.** Se define una sucesión por

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_{n+1} = x_n + \tfrac{1}{2}, \quad n \geq 2, \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

La suma

$$S_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

es igual a:

a) $\dfrac{n+1}{2}$ b) $\dfrac{n+3}{2}$ c) $\dfrac{n^2+n}{4}$ d) $\dfrac{n^3+3n}{4}$

e) Ninguna de las anteriores

## Solución

Calculemos los primeros términos de la sucesión.

$$x_1 = 1$$
$$x_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = \frac{2+1}{2}$$
$$x_3 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = \frac{4}{2} = \frac{3+1}{2}.$$

Se infiere que

$$x_n = \frac{n+1}{2}.$$

Sumando los primeros $n$-términos

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \cdots + x_n &= 1 + \frac{3}{2} + \frac{4}{2} + \cdots + \frac{n+1}{2} \\ &= \frac{1}{2}(1 + 2 + \cdots + n) + \frac{n}{2} \\ &= \frac{1}{2}\frac{n(n+1)}{2} + \frac{n}{2} \\ &= \frac{n^2+3n}{4}. \end{aligned}$$

La respuesta correcta es la alternativa (**d**).

**29.** Si $3k+1$, $k-3$ y $2k+9$ son tres términos consecutivos de una progresión geométrica entonces $k$ puede tomar:

a) Un valor positivo
b) Un valor negativo
c) Dos valores positivos
d) Dos valores negativos

**Solución**

Como son tres términos consecutivos de una progresión geométrica se obtiene la siguiente ecuación:

$$\frac{3k+1}{k-3}=\frac{k-3}{2k+9}$$

de donde

$$(3k+1)(2k+9)=(k-3)^2 .$$

Luego,

$$5k(k+7)=0$$

lo que nos dice que $k = 0$ ó $k = -7$. Se obtiene por lo tanto una sola solución negativa.

La respuesta correcta es la alternativa (**b**).

**30.** Los números enteros del 1 al 2002, ambos inclusive, se escriben en una pizarra en orden creciente 1, 2, … , 2001, 2002. Luego, se borran los que ocupan el primer lugar, el cuarto lugar, séptimo lugar, etc., es decir, los que ocupan los lugares de la forma $3k + 1$. En la nueva lista se borran los números que están en los lugares de la forma $3k + 1$. Se repite el proceso hasta que se borran todos los números de la lista. ¿ Cuál fue el último número que se borró?

**Solución**

Se borran todos los números de la forma $3k + 1$. Para determinar los números a eliminar procedemos así: sacamos $[\![2002/3]\!]=667$ y como $2002\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,3)$, hay igual cantidad de números de la forma $3k$ y $3k + 1$. Pero como 1 ($k = 0$) está incluido en la lista, la cantidad de números de la forma $3k + 1$ es mayor. Entonces los que quedan son 2002 – 668 = 1334. Procedemos análogamente para encontrar la siguiente lista: $[\![1334/3]\!] = 444$ y por el mismo razonamiento que arriba ($1334 \equiv 2 \pmod 3$) quedan en este conjunto 1334 - 445 = 889 números. Repitiendo este procedimiento 17 veces llegamos al final de la lista.

Lo descrito es la solución parcial de **Fernando Medina** del Equipo de Panamá.

Las relaciones descritas pueden ser expresadas por una función. Definamos $f$ por

$$f(x) = \begin{cases} 2p & \text{si } x = 3p, \quad p \in \mathbb{Z} \\ 2p+1 & \text{si } x = 3p+2, \ p \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

La función inversa de $f$ esta dada por

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} 3p & \text{si } x = 3p, \quad p \in \mathbb{Z} \\ 3p+2 & \text{si } x = 2p+1, \ p \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Resolvamos la ecuación $f^{17}(x) = 1$. Basta componerla con $f^{-1}$, 17 veces. Se obtiene:

$$f^{-1}(1) = 2; \ f^{-1}(2) = 3; \ f^{-1}(3) = 5; \ \cdots \ f^{-1}(1065) = 1598$$

y el último número en ser borrado es el 1598.

# Aritmética - Soluciones

# Problemas de Aritmética - Soluciones

**1.** La cantidad de números del 1 al 50 que no son divisibles ni por 5 ni por 7 y no contienen ni 5 ni 7 entre sus dígitos es:

a) 30 b) 31 c) 32 d) 33 e) 34

**Solución**

Los números entre 1 y 50 que son divisibles por 5 son 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50. Divisibles por 7 y no por 5 son 7, 14, 21, 28, 42, 49. Los que contienen 5 ya se contaron y los que contienen 7 entre sus dígitos son 17, 27, 37, 47. En total son 20 números.
Existen 50 números de 1 al 50 restando los 20 anteriores obtenemos 30.

La respuesta correcta es la alternativa (**a**).

**2.** Si los siguientes números se escriben de menor a mayor, el que está en el medio es:

a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{3}{10}$ c) 31% d) 0.03 e) 0.303

**Solución**

Escribamos los tres primeros como números decimales:

$$\frac{1}{3} = 0.333 \qquad \frac{3}{10} = 0.3 \qquad 31\% = \frac{31}{100} = 0.31$$

Ordenándolos tenemos: 0.03, 0.3, <u>0.303</u>, 0.31, 0.33

La respuesta correcta es la alternativa (**e**).

**3.** La cantidad de dígitos que tiene el número $8^2 \times 10^{13}$ es:

a) 12 b) 13 c) 15 d) 17 e) 26

### Solución

Observe que $10^{13}$ tiene 14 dígitos y $8^2$ tiene 2 dígitos al hacer el producto obtenemos 15 dígitos.

La respuesta correcta es la alternativa (**c**).

**4.** $\dfrac{1000^2}{252^2 - 248^2}$ es igual a:

a) 2500 b)1000 c) 500 d) 250 e) 200

### Solución

Observe que $252^2 - 248^2 = (252 + 248)\,(252 - 248) = (500)\,(4) = 2000$ .

Así

$$\frac{1000^2}{2000} = \frac{1000 \times 1000}{2000} = \frac{1000}{2} = 500\,.$$

La respuesta correcta es la alternativa (**c**).

**5.** La diferencia entre la suma de todos los números pares hasta 2002 y la suma de todos los números impares hasta el 2002 es:

a) 0 b) 1000 c) 1001 d) 2001 e) 2002

### Solución

Escribimos los números pares desde el 2 hasta el 2002 como sigue:

$$2, 4, 6, 8, 10, 12, \cdots, 2000, 2002.$$

A continuación escribamos todos los números impares desde el 1 hasta el 2001.

$$1, 3, 5, 7, 9, 11, \cdots, 1999, 2001.$$

Pongamos las dos filas de números juntas.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | … | 2000 | 2002 |
| 1 | 3 | 5 | 7 | 9 | 11 | … | 1999 | 2001 . |

Se observa que la diferencia en cada columna es 1. Como tenemos 1001 columnas, se concluye que la diferencia entre la suma de todos los números de la primera fila y la suma de los números de la segunda fila es igual a la suma de todas las diferencias de las columnas, esto es 1001.

La respuesta correcta es la alternativa (**c**).

**6.** El producto de dos números es 36 y su suma es 20. La suma de los cuadrados de estos números es:

a) 72 b) 97 c) 53 d) 328 e) 472

### Solución

Sean $a$, $b$ los números. Entonces:

$$\begin{aligned} ab &= 36 \\ a+b &= 20\ . \end{aligned}$$

Pero,

$$\begin{aligned} a^2+b^2 &= (a+b)^2-2ab \\ &= (20)^2-2(36)\ . \end{aligned}$$

Se deduce que

$$a^2+b^2=328\,.$$

La respuesta correcta es la alternativa (**d**).

**7.** El valor de la expresión $\sqrt{3+2\sqrt{2}}-\sqrt{3-2\sqrt{2}}$ es

a) $-2$ b) 0 c) 1 d) 2

e) Ninguna de los anteriores

### Solución

Sea

$$\sqrt{a} = \sqrt{3+2\sqrt{2}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}} \ .$$

Entonces,

$$a = 6 - 2\sqrt{9-4\cdot 2}$$
$$a = 4 \ .$$

La respuesta correcta es la alternativa (**d**).

### Solución Alternativa

Observe que

$$3+2\sqrt{2} = (\sqrt{2}+1)^2, \qquad 3-2\sqrt{2} = (\sqrt{2}-1)^2 \ .$$

Luego,

$$\sqrt{3+2\sqrt{2}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{2}+1-\sqrt{2}+1 = 2 \ .$$

**8.** Si la mercancía que se compró el lunes subió un 10 por ciento el martes y bajó un 10 por ciento el miércoles, ¿cuánto se pagó por la mercancía el lunes si se vendió el miércoles en B/. 99.00 ?

a) B/. 99. 00  b) B/. 110. 00  c) B/. 89. 00  d) B/. 100. 00

e) Ninguna de los anteriores

### Solución

Representamos en forma secuencial los cambios que sufrió la mercancía al transcurrir tres días.

| Lunes | Martes | Miércoles |
|---|---|---|
| x | (1.1)x | (0.9)(1.1)x . |

Formamos una ecuación con los datos del miércoles y por lo que se vendió; y así calcular el valor de la incógnita:

$$
\begin{aligned}
(0.9)(1.1)x &= 99 \\
0.99x &= 99 \\
x &= \frac{99}{0.99} \\
x &= 100\,.
\end{aligned}
$$

Se pagó por la mercancía el lunes B/. 100.00.

La respuesta correcta es la alternativa (**d**).

**9.** ¿ Cuál de las potencias siguientes tiene mayor valor?

a) $2^{32}$ b) $4^{15}$ c) $8^{11}$ d) $16^{8}$ e) $32^{6}$

### Solución

Basta escribir cada potencia dada en términos de una potencia de 2. Veamos.

$$
\begin{aligned}
4^{15} &= ((2)^2)^{15} = 2^{30} \\
8^{11} &= ((2)^3)^{11} = 2^{33} \\
16^{8} &= ((2)^4)^{8} = 2^{32} \\
32^{6} &= ((2)^5)^{6} = 2^{30}\,.
\end{aligned}
$$

Se infiere que $8^{11}$ es la potencia con mayor valor.

La respuesta correcta es la alternativa (**c**).

**10.** Un bloque en una pirámide de Egipto mide 180 cm de ancho, 504 cm de largo y 396 cm de altura. La medida en centímetros de la vara de mayor longitud con que un arqueólogo puede medir de manera exacta las dimensiones del bloque es:

a) 12 b) 18 c) 24 d) 36 e) 48

### Solución

Este es un problema de aplicación del concepto de Máximo Común Divisor.

$$\begin{array}{r|l} 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 504 & 2 \\ 252 & 2 \\ 126 & 2 \\ 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|r} 396 & 2 \\ 198 & 2 \\ 99 & 3 \\ 33 & 3 \\ 11 & 11 \\ 1 & 1 \end{array}$$

Las tablas anteriores muestran la descomposición de los números 180, 504 y 396. Esto es:

$$180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \qquad 504 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7 \qquad 396 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 11.$$

Luego, multiplicando las potencias comunes de las descomposiciones anteriores obtenemos:

$$\text{mcd}\,(180, 504, 396) = 2^2 \cdot 3^2 = 36.$$

Esto significa que la vara de mayor longitud con la que puede medir de manera exacta las dimensiones del bloque es de 36 centímetros.

La respuesta correcta es la alternativa (**d**).

**11.** Al evaluar el producto

$$(\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{7})(\sqrt{5}+\sqrt{6}-\sqrt{7})(\sqrt{5}-\sqrt{6}+\sqrt{7})(-\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{7})$$

obtenemos:

a) $-104$ b) $-60$ c) $60$ d) $104$

e) Ninguna de las anteriores

### Solución

Nótese que:

$$(a+b+c)(a-b+c) = a^2-b^2+c^2+2ac$$
$$(a+b-c)(-a+b+c) = -(a^2-b^2+c^2-2ac)\,.$$

Por lo tanto,

$$-(a^2-b^2+c^2+2ac)(a^2-b^2+c^2-2ac)=4a^2c^2-(a^2-b^2+c^2)^2.$$

Tomando $a=\sqrt{5}$, $b=\sqrt{6}$, $c=\sqrt{7}$ y reemplazando, obtenemos 104.

La respuesta correcta es la alternativa (**d**).

**12.** El residuo de la división por 7 de $15^{24}+24^{15}$ es:

a) 5 b) 4 c) 3 d) 2 e) 0

### Solución

Como $15^{24} + 24^{15} = (2 \times 7 + 1)^{24} + 3^{15}\ (7 + 1)^{15}$ debemos estudiar los términos que no posean como factor a 7, que son $1^{24} = 1$ y $(3^{15})\ (1^{15}) = 3^{15}$. Haciendo los cálculos se obtiene que la suma de éstos es un número divisible por 7. Como cada término es divisible por 7, la suma es divisible por 7. El residuo es 0.

La respuesta correcta es la alternativa (**e**).

**13.** $4^4 \cdot 9^4 \cdot 4^9 \cdot 9^9$ es igual a:

a) $13^{13}$ b) $13^{36}$ c) $36^{13}$ d) $36^{36}$ e) $296^{26}$

### Solución

$4^4 \cdot 9^4 \cdot 4^9 \cdot 9^9 = 4^{13} \cdot 9^{13} = 36^{13}$.

La respuesta correcta es la alternativa (**c**).

**14.** Sean $a$ y $b$ números de dos dígitos, tales que el doble del mayor sumado al triple del menor da como resultado 72. Supongamos que:

i) al mayor de los dos se le añade a derecha un cero y los dígitos que forman el menor
ii) el mayor seguido de un cero se agrega a derecha del menor.

Entonces, la división del número encontrado en (i) por el número determinado en (ii) tiene como cociente 2 y resto 590. Los números son:

a) 21 y 10 b) 18 y 12 c) 15 y 14 d) 12 y 16
e) Ninguna de las anteriores

## Solución

Sea $a = a_1a_2$ el mayor de los dos números y $b = b_1b_2$ el menor. El primer número que se obtiene de acuerdo a (i) es: $a_1a_2 0 b_1b_2$. Este número puede escribirse:

$$\begin{aligned} 10^4 a_1 + 10^3 a_2 + 10^2 \cdot 0 + 10b_1 + 10^0 b_2 &= 10^3(10a_1 + a_2) + 10b_1 + b_2 \\ &= 10^3 a + b\,. \end{aligned}$$

El número dado por (ii) se escribe:

$$10^3(10b_1 + b_2) + 10(10a_1 + a_2) = 10^3 b + 10a\,.$$

De acuerdo con las condiciones:

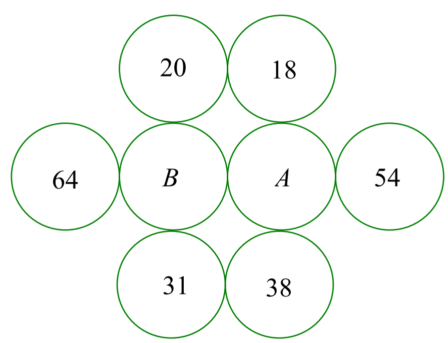
$$\begin{aligned} 10^3 a + b &= 2(10^3 b + 10a) + 590 \\ 2a + 3b &= 72\,. \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema anterior obtenemos:

$$a = 21, \quad b = 10\,.$$

La respuesta correcta es la alternativa (**a**).

**15.** Aura ($A$) y Berta ($B$) van al estadio y son rodeadas por 6 aficionados. La edad de los aficionados se muestra en la figura. Por casualidad, la edad de Aura es el promedio de las edades de las personas más cercanas a ella, también la edad de Berta es el promedio de las edades de las personas más cercanas a ella. La edad de Berta es:




a) 37 años b) $37^{1}/_{2}$ años c) 38 años
d) $38^{1}/_{2}$ años e) $42^{1}/_{2}$ años

### Solución

Sea $a$ la edad de Aura y $b$ la edad de Berta, entonces:

$$a = \frac{b+18+54+38}{4} \qquad y \qquad b = \frac{a+20+64+31}{4}$$

$$a = \frac{b+110}{4} \qquad y \qquad b = \frac{a+115}{4}$$

luego

$$4a = b+110 \qquad y \qquad 4b = a+115.$$

Resolviendo

$$4(4b-115) = b+110,$$

obtenemos

$$b = \frac{570}{15} = 38.$$

La respuesta correcta es la alternativa (**c**).

**16.** La media aritmética de 40 números es 55, si de los números considerados se eliminan el 12, 15, 17, 18 y 38; la nueva media aritmética es:

a) 60 b) 57.5 c) 52.5 d) 50 e) 47.5

### Solución

Sea $x$ la suma de los 40 números. Luego el promedio es

$$\frac{x}{40} = 55$$

de donde se obtuvo

$$x = 2200.$$

Como se elimina 12, 15, 17, 18, y 38 y la suma de ellos es 100 entonces la media es:

$$\frac{x-100}{40-5}=\frac{2200-100}{35}=\frac{2100}{35}=60\,.$$

La respuesta correcta es la alternativa (**a**).

**17.** Si el mayor de dos números enteros se divide por el menor, el cociente es 2 y el resto 9 y si 6 veces el menor se divide por el mayor, el cociente es 2 y el residuo 16. El menor de los números es:

a) 43 b) 17 c) 15 d) 39
e) Ninguna de las anteriores

### Solución

Como en la división Euclidiana el dividendo es igual al divisor multiplicado por el cociente más el resto, si $y$ es el número mayor y $x$ es el menor, entonces:

$$\begin{aligned} y &= 2x + 9 \\ 6x &= 2y + 16\,. \end{aligned}$$

Luego, el sistema

$$\begin{aligned} -2x + y &= 9 \\ 6x - 2y &= 16 \end{aligned}$$

tiene como solución $x = 17$, $y = 43$. Por lo tanto, el menor de los números es 17.

La respuesta correcta es la alternativa (**b**).

**18.** Uno de estos números es igual al producto de los otros cuatro. Este número es:

a) $-2$ b) $\frac{3}{4}$ c) $\frac{1}{6}$ d) $-\frac{1}{4}$ e) 9

### Solución

Basta observar que

$$(-2)\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2} \quad \text{y que} \quad (9)\left(\frac{1}{6}\right)=\frac{3}{2}\,.$$

Multiplicando ambos resultados obtenemos $3/4$.

La respuesta correcta es la alternativa (**b**).

**19.** Sabiendo que $m$ es un entero par y que $n$ es un entero, el número $(m + 1)^2 + n(m + 1)$ es:

a) Siempre impar
b) Siempre par
c) Par solamente cuando $n$ es par
d) Par solamente cuando $n$ es impar
e) No se puede determinar

### Solución

$(m+1)^2$ es impar y $n(m+1)$ es par si $n$ es par, luego la suma es impar. Si $n$ es impar, $n(m+1)$ es impar entonces la suma es par.

La respuesta correcta es la alternativa (**d**).

**20.** Dado el número $x$ de 3 cifras, forme un nuevo número de 6 cifras, repitiendo las tres cifras en el mismo orden. Si se divide este nuevo número por 7 y el resultado se divide por 11, se obtiene:

a) $77x$
b) $13x$
c) $3x$
d) $22x$
e) Ninguna de las anteriores

### Solución

Sea $x$ el número, $y$ el nuevo número al repetir las 3 cifras, luego

$$\begin{aligned} y &= x + 10^3 x \\ &= 1001x. \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} \frac{y}{7} &= \frac{1001x}{7} \\ &= 143x \end{aligned}$$

y dividiendo por 11,

$$\frac{143}{11}x = 13x.$$

La respuesta correcta es la alternativa (**b**).

**21.** El total de pares de números de la forma ($x$, $2x + 1$) tales que ambos sean números primos menores que 100, es:

a) 4 b) 5 c) 6 d) 7 e) 8

### Solución

Los números primos con las condiciones dadas son:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2, 5 | 5, 11 | 23, 47 | 41, 83 |
| 3, 7 | 11, 23 | 29, 59 | |

La respuesta correcta es la alternativa (**d**).

**22.** La relación entre $a$ y $b$ si $a$ = (999222) y $b$ = (999221)(999223) es:

a) $2a = b$ b) $b - a^2 = 1$ c) $a^2 - b = 1$ d) $a^2 - b^2 = 1$ e) $\frac{b}{a^2} = 1$

### Solución

Observe que si

$$a = 999222 \text{ y } b = (999221)(999223),$$

$$b = (a-1)(a+1)$$

de donde

$$b = a^2 - 1.$$

Luego

$$a^2 - b = 1.$$

La respuesta correcta es la alternativa (**c**).

**23.** Un número de seis cifras empieza por la izquierda con la cifra dos. Si se pasa esta cifra del primer lugar al último sin alterar el orden de las demás cifras, se obtiene un número tres veces mayor que el número original. Las tres primeras cifras del número original son:

a) 255 b) 257 c) 258 d) 275 e) 285

**Solución**

Denotemos por $2abcde$ al número de seis cifras y sea $x = abcde$ entonces,

$$2abcde = 2\times 10^5 + abcde\,.$$

Como al intercambiar la posición del 2, el número que se obtiene es tres veces mayor que el número original,

$$3\left(2\times 10^5 + x\right) = 10x + 2$$

ya que $10x + 2$ es el número con el dos en la última cifra. Luego,

$$7x = 6\times 10^5 - 2\,.$$

Se deduce que las cifras $abcde$ son precisamente,

$$x = 85714$$

y el número buscado es

$$2abcde = 285714\,.$$

La respuesta correcta es la alternativa (**e**).

**24.** Dado el número 135 al convertirlo al sistema binario se obtiene:

a) $1110001_2$ b) $10001101_2$ c) $10000111_2$ d) $11000111_2$
e) Ninguna de las anteriores

**Solución**

Dividamos 135 por 2, luego el cociente por 2 y así sucesivamente. Anotando los residuos obtenemos:

$$\begin{aligned}
135 &= 2\cdot 67+1\\
67 &= 2\cdot 33+1\\
33 &= 2\cdot 16+1\\
16 &= 2\cdot 8+0\\
8 &= 2\cdot 4+0\\
4 &= 2\cdot 2+0\\
2 &= 2\cdot 1+0\\
1 &= 2\cdot 0+1\,.
\end{aligned}$$

Luego,

$$135 = 1\cdot 2^7 + 0\cdot 2^6 + 0\cdot 2^5 + 0\cdot 2^4 + 0\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0\,,$$

y

$$135 = 10000111_2\,.$$

La respuesta correcta es la alternativa (**c**).

**25.** Un ganadero sólo sabe contar sus vacas de 2 en 2, 3 en 3, 4 en 4 y de 5 en 5. Observa que al contar el ganado de su finca de 2 en 2 le sobra uno, de 3 en 3 le sobra uno, de 4 en 4 le sobra uno, de 5 en 5 no le sobra nada. El menor número de vacas que puede tener el ganadero es:

a) 15 b) 25 c) 35 d) 45

e) Ninguna de las anteriores.

### Solución

Basta contar. Si al contar las vacas de 2 en 2 le sobra 1, los posibles números son:

3, 5, 7, … ,21, 23, <u>25</u>, …

Si al contar de 3 en 3 le sobra 1, los posibles números son:

4, 7, 10, … ,22, <u>25</u>, 28, …

Si al contar de 4 en 4 le sobra 1, los posibles números son:

5, 9, 13, … ,<u>25</u>, 29, 33, …

Obsérvese que el primer número que aparece en todas las filas es 25.

La respuesta correcta es la alternativa (**b**).

**26.** ¿Cuántos números naturales dejan un resto 3 cuando dividen a 51 y un resto 2 cuando dividen a 38?

a) 2 b) 3 c) 4 d) 5
e) Ninguna de las anteriores

### Solución

Si al dividir 51 por el número el resto es 3, el número es un divisor de 48 distinto de 1. Estos números son :

2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48.

Si al dividir 38 por el número el resto es 2, el número debe ser divisor de 36 distinto de 1 y 2.

3, 4, 6, 9 12, 18, 36.

Los números que satisfacen ambas condiciones son:

3, 4, 6, 12.

La respuesta correcta es la alternativa (**c**).

**27.** Un cierto número entero $n$ es múltiplo de 5 y 9. ¿Cuáles de las siguientes alternativas son verdaderas?

I. $n$ es un entero impar II. $n$ es igual a 45 III. $n$ es un múltiplo de 15

a) I y III solamente b) II y III solamente
c) III solamente d) I, II y III
e) Ninguna de las anteriores

### Solución

El número $n$ es un múltiplo de 5 y 9. Su descomposición en números primos incluye a 5 y 3, y puede incluir probablemente otros números primos como 2. Esta posibilidad descarta que

$n$ sea impar al igual que descarta al 45. Pero como 5 y 3 están en la descomposición en potencias de primos de $n$, el número es un múltiplo de 15.

La respuesta correcta es la alternativa (**c**).

**28.** Si $a$ y $b$ son enteros positivos pares, ¿cuáles de los siguientes números serán enteros pares?

I. $a^b$ II. $(a+1)^b$ III. $a^{b+1}$

a) II solamente
b) I y II solamente
c) I y III solamente
d) I, II y III
e) Ninguna de las anteriores

### Solución

Nótese que la potencia de un número par es par, aun cuando el exponente sea impar. Así, tanto $a^b$ y $a^{b+1}$ son enteros pares. Análogamente la potencia de un número impar es impar, aun cuando el exponente sea par. Por lo anterior, $(a+1)^b$ es impar.

La respuesta correcta es la alternativa (**c**).

**29.** El producto

$$0.5\times 0.75\times 0.375\times 0.666\cdots$$

es igual a:

a) $3/32$
b) $1/16$
c) $5/32$
d) $3/16$
e) Ninguna de las anteriores

### Solución

Basta convertir a números racionales los decimales dados:

$$\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{8}\times\frac{2}{3}=\frac{3}{32}.$$

La respuesta correcta es la alternativa (**a**).

**30.** La suma de los números impares menores que 1000 es:

a) 1 000 000 b) 500 000 c) 250 000 d) 150 000

e) Ninguna de las anteriores

### Solución

Los números impares forman una progresión aritmética de diferencia 2; el primer número es 1 y el último número es 999. Existen 500 números impares menores que 1000. La suma de los primeros 500 números impares está dada por la fórmula

$$S=\tfrac{1}{2}(a_1+a_n)n$$

en donde $a_1$ es el primer término de la progresión, $a_n$ es el último y n representa el número de términos de la progresión. Como en este caso $a_1=1, a_{500}=999$ y el número de términos es 500, tenemos:

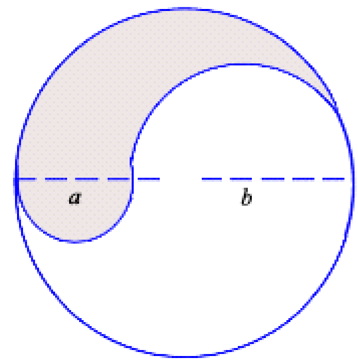
$$S = \tfrac{1}{2}(1 + 999)(500) = (500)(500) = 250000.$$

La respuesta correcta es la alternativa (**c**).

# Geometría - Soluciones

## Problemas de Geometría - Soluciones

**1.** Una circunferencia de diámetro $a + b$ se divide en dos regiones mediante las fronteras de las semicircunferencias de diámetros $a$ y $b$ respectivamente según se indica en la figura. La razón del área de la región sombreada al área de la región no sombreada es:




a) $\dfrac{a}{b}$ b) $\dfrac{a+b}{b-a}$ c) $\dfrac{b-a}{b}$

d) $\dfrac{ab}{a+b}$ e) $\dfrac{a^2+2ab}{b^2+2ab}$

### Solución

Área del semicírculo de diámetro $a + b$:

$$\frac{1}{2}\pi\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{8}(a+b)^2$$

Área del semicírculo de diámetro $a$: $\dfrac{1}{2}\dfrac{\pi}{4}a^2$.

Área del semicírculo de diámetro $b$: $\dfrac{1}{2}\dfrac{\pi}{4}b^2$.

Luego el área sombreada es:

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{8}(a+b)^2+\frac{\pi}{8}a^2-\frac{\pi}{8}b^2 &= \frac{\pi}{8}(a^2+b^2+2ab+a^2-b^2)\\ &= \frac{\pi}{8}(2a^2+2ab)\\ &= \frac{\pi}{4}(a^2+ab).\end{aligned}$$

El área *no* sombreada es:

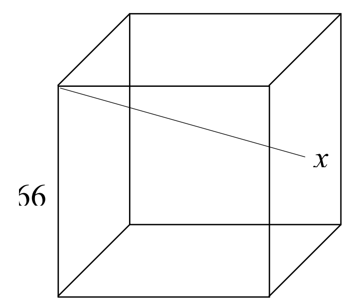
$$\frac{\pi}{8}(a+b)^2 + \frac{\pi}{8}b^2 - \frac{\pi}{8}a^2 = \frac{\pi}{8}(a^2 + b^2 + 2ab + b^2 - a^2)$$
$$= \frac{\pi}{4}(b^2 + ab).$$

De lo anterior, la razón entre las áreas es:

$$\frac{\pi/4\,(a^2+ab)}{\pi/4\,(b^2+ab)} = \frac{a(a+b)}{b(a+b)} = \frac{a}{b}.$$

La respuesta correcta es la alternativa (**a**).

**2.** La arista de un cubo tiene longitud 6. La distancia del punto medio $x$ de una de las caras del cubo a uno de los vértices de la cara opuesta es:

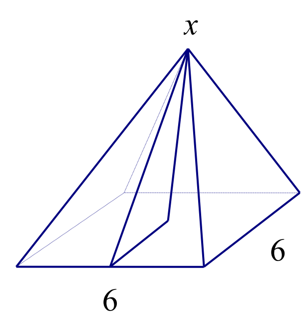



a) $6\sqrt{2}$ b) $4\sqrt{3}$ c) $2\sqrt{6}$

d) $3\sqrt{6}$ e) $6\sqrt{3}$

### Solución

Forme la pirámide de vértice el punto $x$ y de base la cara del cubo opuesto a la cara que contiene a $x$. La altura de esta pirámide es 6. Considere a continuación, una de las caras de la pirámide. Sus lados forman un triángulo isósceles, de base de longitud 6. Para calcular la altura de este triángulo use la altura de la pirámide, de longitud 6 y el segmento en la base que une el punto medio de la arista con el punto medio de la base de la cara de la pirámide. Entonces:




$$h = \sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}\,.$$

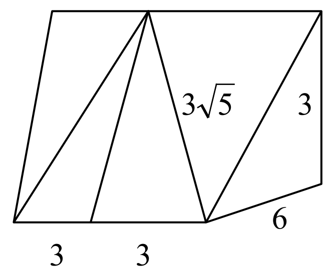
Por lo tanto la distancia buscada es:

$$d = \sqrt{3^2 + (3\sqrt{5})^2} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}\,.$$

La respuesta correcta es la alternativa (**d**).

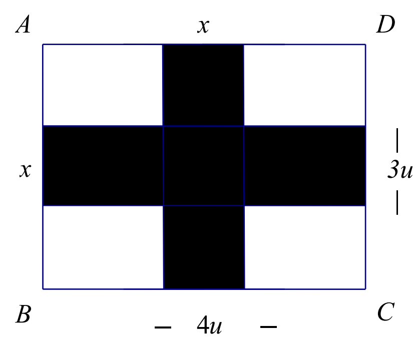
## Solución Alternativa

Ver figura.




**3.** Si el área de la región sombreada es la mitad del área del rectángulo *ABCD*, el valor de *x* es:

a) 1 b) 2 c) 3
d) 6 e) Ninguna de las anteriores




## Solución

El área del rectángulo es 12u². Como el área de la región sombreada es la mitad del área del rectángulo *ABCD*, necesariamente

$$12-(4-x)(3-x)=6 \qquad \text{con } 0<x\leq 3$$

lo que es equivalente a

$$(x-4)(x-3)=6 \qquad \text{con } 0<x\leq 3.$$

Resolviendo se encuentra la siguiente ecuación:

$$x^2-7x+6=0.$$

Las soluciones son $x=1$, $x=6$. La solución única en este caso corresponde a $x=1$.

La respuesta correcta es la alternativa (**a**).

**4.** Veinte círculos están contenidos cada uno dentro del otro. El área de cada círculo es exactamente la mitad de la del círculo más próximo que lo contiene. Si la circunferencia del círculo mayor tiene longitud 16π, el menor de los círculos tiene radio igual a:

a) $\sqrt{2}/128$ b) 1/64 c) $\sqrt{2}/256$

d) $2\sqrt{10}/\pi$ e) Ninguna de las anteriores

## Solución

Denotemos por $A_n$ y $r_n$ el área y el radio del $n$-ésimo círculo. De acuerdo a la hipótesis

$$A_n = \tfrac{1}{2} A_{(n-1)} \quad \text{con} \quad 2 \le n \le 20\,.$$

Como $A_1$ es el área del primer círculo, el área del segundo círculo es $A_2 = \tfrac{1}{2} A_1$, el área del tercer círculo es

$$A_3 = \tfrac{1}{2} A_2 = \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2} A_1) = \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 A_1$$

y en general el área del $n$-ésimo círculo será

$$A_n = \left(\tfrac{1}{2}\right)^{(n-1)} \cdot A_1 = 2^{(1-n)} A_1\,.$$

Por lo tanto, el área del círculo más pequeño $A_{20}$ es:

$$A_{20} = 2^{-19} A_1$$

y su área está dada por:

$$\pi {r_{20}}^2 = 2^{-19} \pi r_1^2\,. \qquad (1)$$

Como la longitud de la circunferencia mayor es $16\pi = 2 \cdot \pi \cdot r_1$ se tiene que

$$r_1 = 8 = 2^3$$

y sustituyendo en (1)

$$\pi {r_{20}}^2 = 2^{-19} \cdot \pi \cdot 2^6 = 2^{-13} \pi\,.$$

Se deduce que:

$$r_{20} = 2^{-\frac{13}{2}} = \tfrac{\sqrt{2}}{128}\,.$$

La respuesta correcta es la alternativa (**a**).

**5.** Las medidas de los ángulos de un cuadrilátero están en progresión aritmética y el menor de ellos mide 60º. El ángulo mayor mide:

a) 80º  b) 100º  c) 120º  d) 160º
e) Ninguna de los anteriores

### Solución

Si la diferencia de la progresión es $d$, los ángulos del cuadrilátero miden

$$60^\circ,\ 60^\circ + d,\ 60^\circ + 2d,\ 60^\circ + 3d.$$

Como la suma de los ángulos internos de un cuadrilátero es 360º, tenemos que:

$$60^\circ + (60^\circ + d) + (60^\circ + 2d) + (60^\circ + 3d) = 360^\circ .$$

Es decir

$$240^\circ + 6d = 360^\circ$$

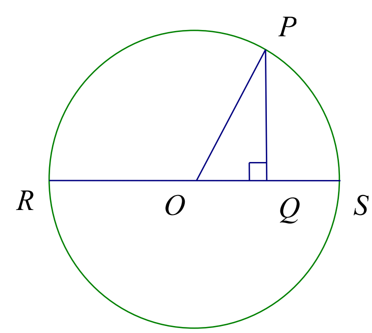
o sea, $d = 20^\circ$ .

Por lo tanto el ángulo mayor es:

$$60^\circ + 3\mathrm{d} = 60^\circ + 3(20) = 120^\circ .$$

La respuesta correcta es la alternativa (**c**).

**6.** En la figura, el radio $\overline{OP}$ de la circunferencia mide 14 cm de longitud y $Q$ es un punto en el diámetro $\overline{RS}$ . Si $\dfrac{QS}{QR} = \dfrac{2}{5}$, el segmento $\overline{OQ}$ mide:




a) 6 cm  b) 8 cm  c) 10 cm
d) 5 cm  e) Ninguna de las anteriores

### Solución

En la figura

$$OS = OR = OP = 14 \text{ cm}$$

y

$$QS = OS - OQ$$
$$QR = OR + OQ\,.$$

Como

$$\frac{QS}{QR} = \frac{2}{5}$$

entonces,

$$\frac{OS - OQ}{OR + OQ} = \frac{2}{5}$$

y por lo tanto,

$$\frac{14 - OQ}{14 + OQ} = \frac{2}{5}\ .$$

De lo anterior se deduce que:

$$70 - 5(OQ) = 28 + 2(OQ)$$

y

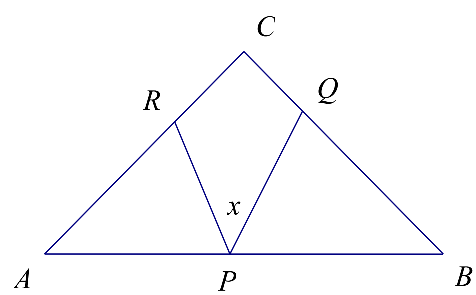
$$OQ = 6 \text{ cm}\,.$$

La respuesta correcta es la alternativa (**a**).

**7.** En el triángulo $ABC$ de la figura, el ángulo $C$ es recto. Si $PB = QB$ y $AR = AP$ entonces el ángulo $x$ mide:

a) $90^\circ$ b) $60^\circ$ c) $45^\circ$

d) $30^\circ$ e) Ninguna de los anteriores




## Solución

Para determinar el valor del ángulo $x$ basta notar que:

la suma de las medidas de los ángulos $A$ y $B$ es $90^\circ$ ya que el ángulo $C$ es recto y

los ángulos $\angle APR$ y $\angle PRA$, $\angle QPB$ y $\angle BQP$ son congruentes.

Entonces,

$$(m\angle A + m\angle B) + 2(m\angle APR + m\angle QPB) = 360^\circ$$

y por lo tanto,

$$m\angle APR + m\angle QPB = 135^\circ .$$

Luego,

$$m\angle x = 45^\circ$$

La respuesta correcta es la alternativa (**c**).

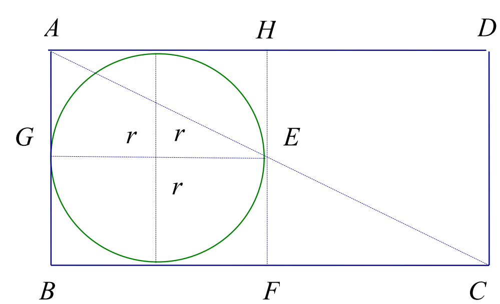
**8.** Una circunferencia de radio $r$ es tangente a los lados $\overline{AD}, \overline{BC}, \overline{AB}$ del rectángulo $ABCD$ y pasa por el punto medio de la diagonal $\overline{AC}$. El área del rectángulo en términos de $r$ es:

a) $4r^2$ b) $6r^2$ c) $8r^2$ d) $12r^2$

e) Ninguna de las anteriores

### Solución

Véase al figura adjunta. Como la circunferencia es tangente a los lados $\overline{AD}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AB}$ del rectángulo, es que $AB = 2r$. Además, como la circunferencia pasa por el punto medio de la diagonal $\overline{AC}$, el cuadrilátero $ABFH$ es un cuadrado y en consecuencia $GE = 2r$. Al ser los triángulos $\Delta AGE$ y $\Delta ABC$ semejantes tenemos que




$$\frac{BC}{GE} = \frac{AB}{AG}.$$

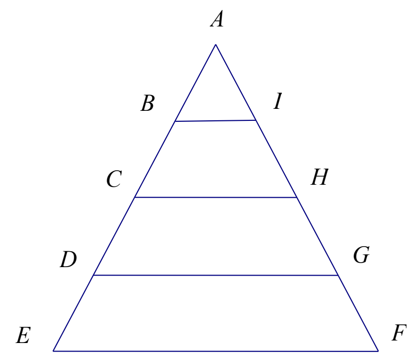
O sea,

$$\frac{BC}{2r} = \frac{2r}{r}$$

y en consecuencia, $BC = 4r$. El área del rectángulo es $(AB)(BC) = 8r^2$.

La respuesta correcta es la alternativa (**c**).

**9.** En la figura, $AB = BC = CD = DE$ y $AI = IH = HG = GF$. Si el área del triángulo $\Delta AEF$ es 80, entonces el área del trapezoide $DEFG$ es:




a) 25 b) 30 c) 35

d) 40 e) Ninguna de los anteriores

## Solución

Trace la altura del triángulo $\Delta AEF$ desde el vértice $A$ al lado $\overline{EF}$, de longitud $h$. El área del triángulo es:

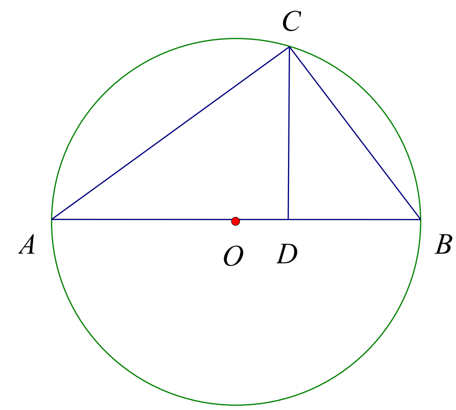
$$\frac{1}{2}h(EF) = 80.$$

El área del trapezoide $DEFG$ resulta de la diferencia entre el área del triángulo $\Delta AEF$ y el área del triángulo $\Delta ADG$. Pero estos triángulos son semejantes y la longitud del lado $\overline{AD}$ es ¾ la longitud del lado $\overline{AE}$, la base $\overline{DG}$ es ¾ la longitud de $\overline{EF}$, mientras que la altura de $\Delta ADG$ es $\frac{3}{4}h$. El área del trapezoide es por lo tanto:

$$\begin{aligned}
80 - \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}EF\right)\frac{3}{4}h &= 80 - \frac{1}{2}\cdot\frac{9}{16}(EF)h \\
&= 80 - \frac{9}{16}\cdot\left(\frac{1}{2}(EF)h\right) \\
&= 80 - \frac{9}{16}\cdot 80 \\
&= 80\left(1 - \frac{9}{16}\right) \\
&= 80\left(\frac{7}{16}\right) \\
&= 35.
\end{aligned}$$

La respuesta correcta es la alternativa (**c**).

**10.** Considere el triángulo $\Delta ABC$ donde $\overline{AB}$ es el diámetro de una circunferencia y $\overline{CD}$ es la altura del triángulo desde el vértice $C$, como se muestra en la figura. Si $AD = 25$ cm y $DB = 16$ cm, el área del triángulo $\Delta ABC$ en cm$^2$ es:

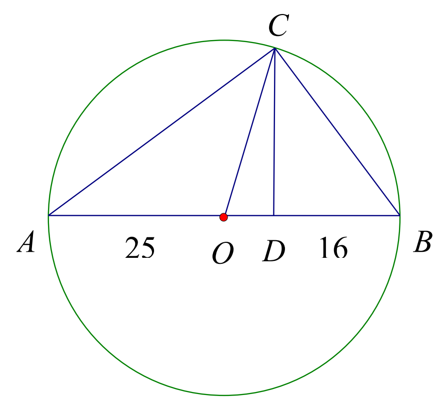



a) 250 b) 410 c) 200

d) 820 e) 400

### Solución

Trace el segmento de $C$ al centro de la circunferencia $O$. La distancia de $O$ a $D$ es 9/2 y el cuadrado de la altura del triángulo $\Delta ABC$ es:

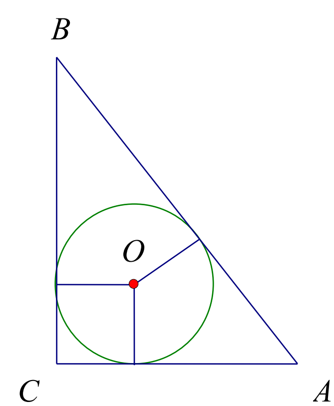



$$\left(\frac{41}{2}\right)^2 - \left(\frac{9}{2}\right)^2 = \frac{1681-81}{4} = \frac{1600}{4} = 400.$$

El área de triángulo $\Delta ABC$ es $\left(\frac{1}{2}\right)(41)(20) = 410$.

La respuesta correcta es la alternativa (**b**).

**11.** Los lados de un triángulo rectángulo $\Delta ABC$ miden 6 cm, 8 cm y 10 cm. El radio de la circunferencia inscrita en el triángulo $\Delta ABC$, mide en cm:




a) 4 b) 3 c) 2

d) $\frac{5}{2}$ e) $\frac{3}{2}$

## Solución

Se puede considerar cada vértice del triángulo como puntos exteriores a la circunferencia desde los que se trazan rectas tangentes a ésta. Véase al figura adjunta.

Las distancias de los vértices a los puntos de tangencia son iguales, por lo que se tiene

$$x + \mathrm{r} = 6$$

$$y + r = 8$$

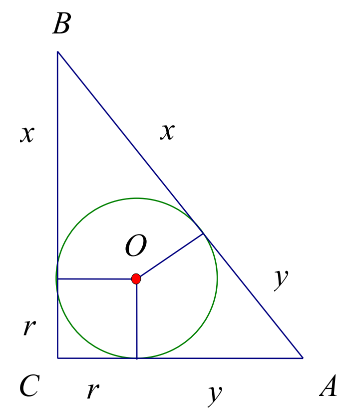
$$x + y = 10\ .$$

Así,

$$10 + 2r = 14$$

de donde $r = 2$.

La respuesta correcta es la alternativa (**b**).

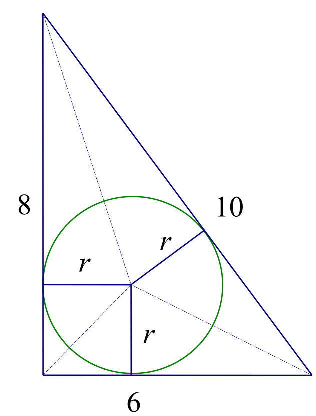



## Solución de Verónica Him

El área del triángulo es 24 cm$^2$. Luego,

$$\begin{aligned} 24 &= \frac{6r}{2} + \frac{8r}{2} + \frac{10r}{2} \\ &= 3r + 4r + 5r \\ &= 12r\ . \end{aligned}$$

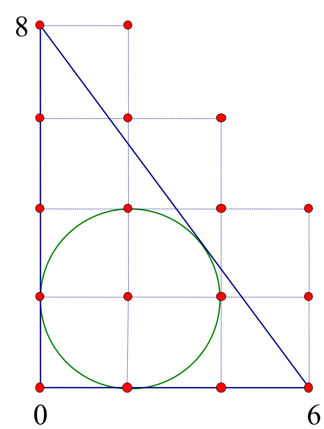
Se deduce que $r = 2$




## Solución de Daniel Arévalo

"Cuadriculemos" el triángulo con cuadrados de lado 2. Como los catetos del triángulo son pares, sobre la base pueden construirse 3 cuadrados mientras que en el otro cateto, 4.

Como la circunferencia se cubre con 4 cuadrados, se deduce que su radio es 2.

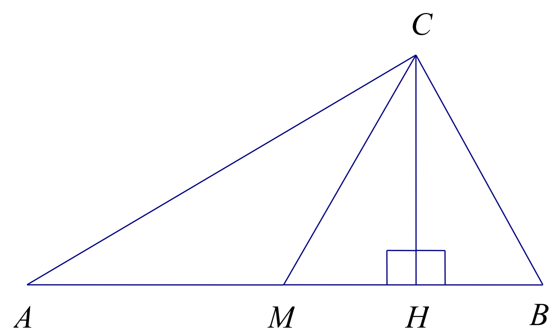


**12.** En el triángulo $\Delta ABC,$ con el ángulo $\angle C$ recto, la altura $\overline{CH}$ y la mediana $\overline{CM}$ trisecan el ángulo recto. Si el área del triángulo $\Delta CMH$ es $k$, entonces el área del triángulo $\Delta ABC$ es:

a) $6k$ b) $4\sqrt{3}k$ c) $4k$ d) $3\sqrt{3}k$ e) $3k$

### Solución

Los triángulos $\Delta CMH$, $\Delta CHB$ son congruentes porque los ángulos $\angle HCM$ y $\angle BCH$ son congruentes. Luego la base $\overline{MH}$ de $\Delta CMH$ es $\frac{1}{4}$ de la base $\overline{AB}$ del triángulo $\Delta ABC,$ ya que $\overline{CM}$ es la mediana. Como la altura es la misma para ambos triángulos, el área de $\Delta ABC$ es $4k$.



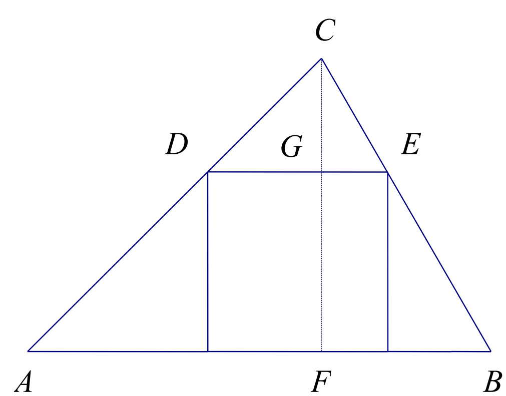

La respuesta correcta es la alternativa (**c**).

**13.** La longitud del lado del cuadrado inscrito en un triángulo acutángulo de base 10 y altura 4 es:

a) $\frac{11}{7}$ b) $\frac{5}{2}$ c) $\frac{20}{7}$ d) $3$ e) $\frac{10}{3}$

### Solución

Trace un triángulo acutángulo $\Delta ABC$ e inscriba en él un cuadrado cuyos vértices en la parte superior denotaremos por $D$ y $E$. Trace la altura desde $C$ hasta el segmento $\overline{AB}$ y denote por $F$ el pie de la perpendicular. Observe que los triángulos $\Delta ABC$ y $\Delta DEC$ son semejantes, luego



$$\frac{DE}{AB}=\frac{CG}{CF}$$
$$\frac{DE}{10}=\frac{CG}{4}$$

y se tiene que

$$4DE=10CG\,.$$

Como $CG=CF-FG$ entonces,

$$4DE=10(CF-FG)$$

y

$$4DE=40-10DE$$

de donde obtenemos

$$DE=\frac{20}{7}\,.$$

La respuesta correcta es la alternativa (**c**).

**14.** Los centros de cuatro circunferencias de radio 4, están sobre los vértices de un cuadrado de lado 4. El área del cuadrilátero formado por los cuatro puntos interiores al cuadrado que son intersección de algún par de circunferencias es:

a) $\left(\sqrt{3}-1\right)^2$ b) $\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^2$ c) $8\left(\sqrt{3}-1\right)^2$ d) $8\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^2$ e) $\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)^2$

## Solución

El cuadrilátero resulta un cuadrado de lado de longitud $2x$, pues sus lados son cuerdas de circunferencias congruentes que equidistan del centro. Además, las cuerdas opuestas son paralelas y las diagonales del cuadrado las bisecan. Por lo tanto,

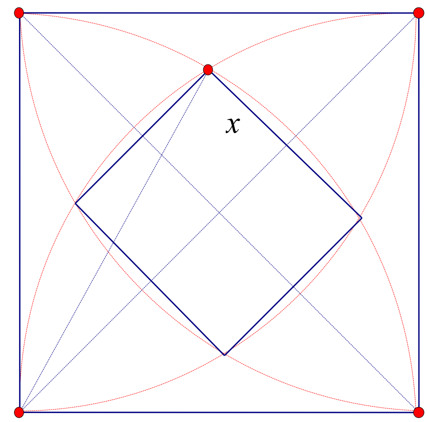
$$\left(2\sqrt{2}+x\right)^2+x^2=16$$
$$x^2+2\sqrt{2}x-4=0$$
$$x=\sqrt{6}-\sqrt{2}$$
$$x=\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)$$

y el área del cuadrilátero es

$$A = 4\left[\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)\right]^2 = 8\left(\sqrt{3}-1\right)^2$$

*Nota*: La medida de la diagonal del cuadrado es $4\sqrt{2}$. Esto garantiza que la medida del cateto del triángulo considerado es $2\sqrt{2}+x$.

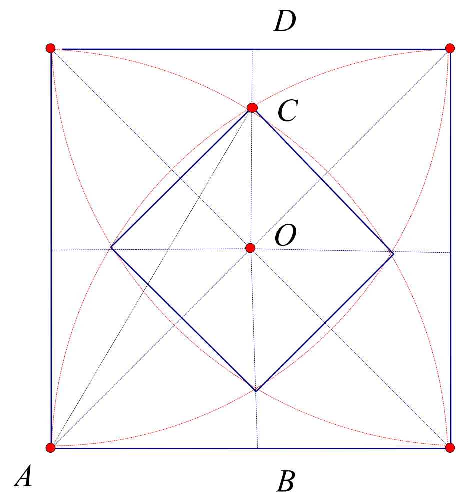
La respuesta correcta es la alternativa (**c**).




**Solución** de Henry Wong Kiao

Nótese que la distancia del punto $A$ al punto $C$ es 4 y la de $A$ a $B$ es 2. Esto implica que la distancia de $B$ a $C$ es $2\sqrt{3}$ y la de $O$ a $C$ es $2\sqrt{3}-2$. El área del cuadrado es por lo tanto:

$$8\left(\sqrt{3}-1\right)^2.$$



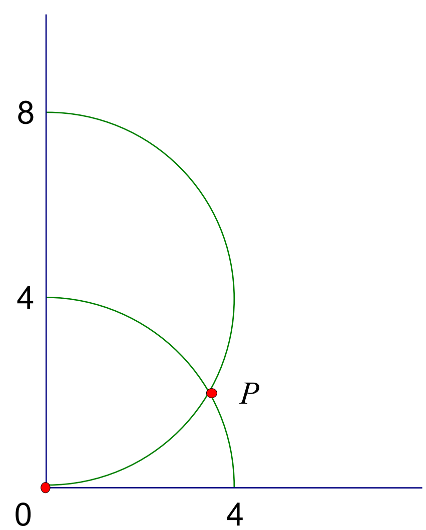

**Solución usando Geometría Analítica**

Considérense las ecuaciones de las circunferencias cuyas gráficas aparecen en un sistema de coordenadas.

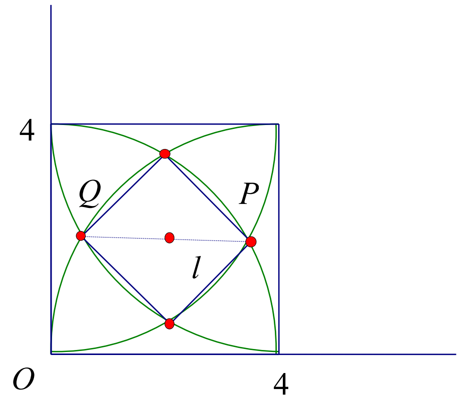
$$x^2 + y^2 = 1$$
$$x^2 + (y-4)^2 = 1$$

Desarrollando obtenemos:

$$x^2 + y^2 = 1$$
$$x^2 + y^2 - 8y = 1$$

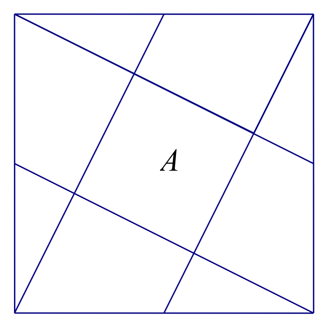


Resolviendo el sistema encontramos las coordenadas del punto $P$: $\left(2\sqrt{3},2\right)$. Por simetría se obtiene las coordenadas del punto Q: $\left(4-2\sqrt{3},2\right)$. La longitud del segmento $\overline{PQ}$ es $4\left(\sqrt{3}-1\right)$. Como $\overline{PQ}$ es una de las diagonales del cuadrado, tenemos la relación




$$\begin{aligned} l^2 &= \frac{PQ^2}{2} \\ &= \frac{16\left(\sqrt{3}-1\right)^2}{2} \\ &= 8\left(\sqrt{3}-1\right)^2 \end{aligned}$$

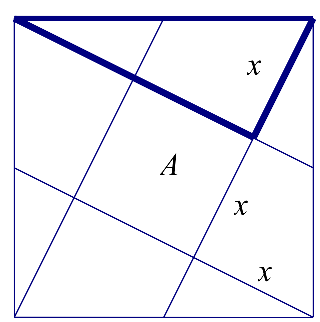
**15.** Dado un cuadrado cuyo lado tiene longitud 1, considere el cuadrado interior $A$ determinado uniendo cada vértice del cuadrado unitario con el punto medio de un lado no adyacente según la figura. El área de $A$ es:




a) 1/5 b) 1/4 c) 1/6 d) 2/5 e) 1/7

### Solución

Sea $x$ la longitud del lado del cuadrado interior $A$. Consideremos los triángulos rectángulos de hipotenusa 1. Hay 4 de ellos, todos congruentes y satisfacen




$$(2x)^2 + x^2 = 1$$

luego:

$$5x^2 = 1$$

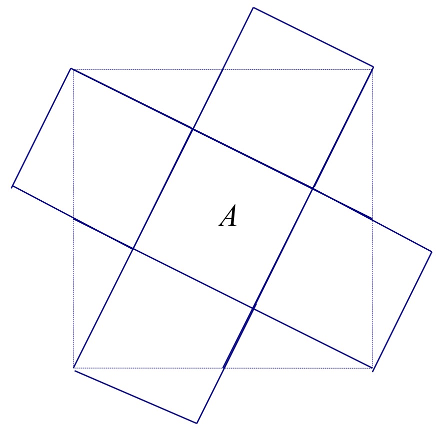
y por lo tanto,

$$x^2 = \frac{1}{5}.$$

El área del cuadrado interior $A$ es $1/5$.

La respuesta correcta es la alternativa (**a**).

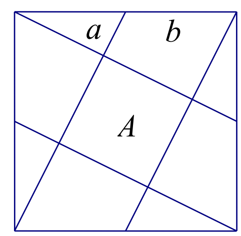
**Solución** de Shey Ling Him Gordón




Nótese que los triángulos pequeños completan los cuadrados. Tenemos ahora 5 cuadrados cuyas áreas suman 1. El área de $A$ es $1/5$.

**Solución** de Sing Kong

Denotemos por $a$ el área del triángulo, por $b$ la del trapecio. La suma de las dos es igual al área buscada. Como hay 4 triángulos y 4 trapecios, se da la relación entre áreas:



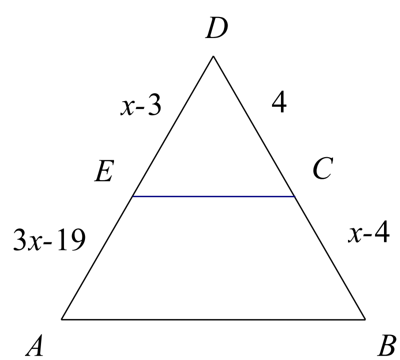

$$4(a+b)+A=4A+A=1$$

El área de $A$ es $1/5$.

**16.** En la figura, los valores de $x$ que cumplen la condición que el segmento $\overline{EC}$ es paralelo al segmento $\overline{AB}$ son:

a) 7 y 1 b) 11 y 8 c) 15/2 y 7

d) 8 y 6 e) Ninguna de las anteriores




**Solución**

En la figura, las rectas $\overleftrightarrow{AD}$ y $\overleftrightarrow{BD}$ son transversales a los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{EC}$. Para que las rectas determinadas por los segmentos sean paralelas deben ser proporcionales los segmentos $\overline{DE}$ y $\overline{EA}$, $\overline{DC}$ y $\overline{CB}$, por lo que basta que:

$$\frac{x - 3}{3x - 19} = \frac{4}{x - 4}.$$

De esto se tiene que

$$(x-3)(x-4) = 4(3x-19)$$
$$x^2 - 7x + 12 = 12x - 76$$

equivalentemente

$$x^2 - 19x + 88 = 0$$
$$(x-8)(x-11) = 0\,.$$

Las raíces de esta ecuación son $x = 8$ y $x = 11$.

La respuesta correcta es la alternativa (**b**).

**17.** El triángulo cuyos lados miden 6 cm, 5 cm y 4 cm es:

a) rectángulo b) acutángulo c) obtusángulo d) equiángulo

### Solución

Como $a = 6$, $b = 5$ y $c = 4$ obtenemos

$$a^2 = 36,\ b^2 = 25 \text{ y } c^2 = 16$$

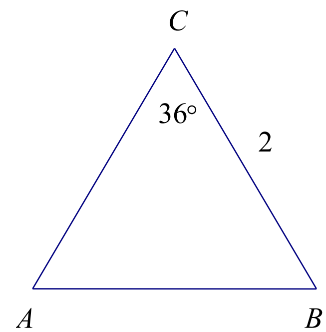
por lo que tenemos:

$$36 = a^2 < b^2 + c^2 = 41$$
$$25 = b^2 < a^2 + c^2 = 52$$
$$16 = c^2 < a^2 + b^2 = 61.$$

Por consiguiente, al ser el cuadrado de cualquier lado menor que la suma de los cuadrados de los otros dos, se trata de un triángulo acutángulo.

La respuesta correcta es la alternativa (**b**).

**18.** La medida del ángulo del vértice $C$ de un triángulo isósceles es 36º y uno de los lados congruentes mide 2. El lado opuesto al vértice $C$ mide:




a) $\sqrt{5}$ b) $\sqrt{2}$ c) $\sqrt{5}$ - 1 d) 2

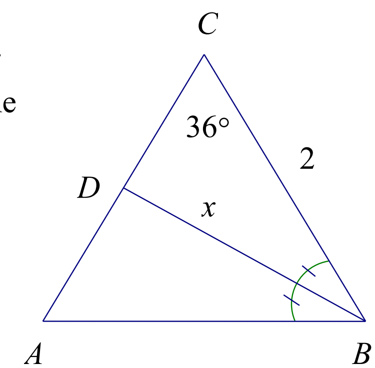
e) Ninguna de las anteriores

### Solución

Como el triángulo $\Delta ABC$ es isósceles y $m\angle C = 36º$ entonces $m\angle A = m\angle B = 72º$. Si $\overline{BD}$ es la bisectriz del ángulo $B$ tenemos que:

$m\angle ABD = 36º$; $m\angle DBC = 36º$ y $CD = BD = x$ y $AD = 2 - x$.

Dado que los triángulos $\Delta ABC$ y $\Delta ADB$ son semejantes se tiene




$$\frac{x}{2-x} = \frac{2}{x}.$$

Luego,

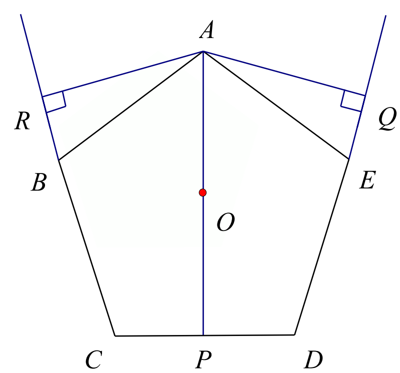
$$x^2 + 2x - 4 = 0$$

de donde

$$x = \sqrt{5} - 1$$

La respuesta correcta es la alternativa (**c**).

**19.** $ABCDE$ es un pentágono regular $\overline{AP}, \overline{AQ}, \overline{AR}$ son segmentos perpendiculares trazados desde $A$ a las rectas $\overleftrightarrow{CD}, \overleftrightarrow{DE}, \overleftrightarrow{CB}$ respectivamente. Sea $O$ el centro del pentágono. Si $OP = 1$, entonces




$$AO + AQ + AR$$

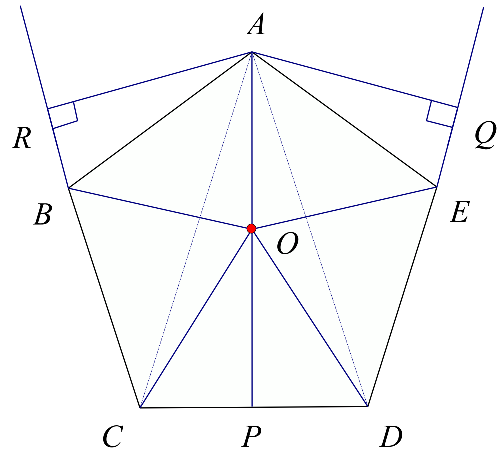
es igual a:

a) 3 b) $1 + \sqrt{5}$ c) 4

d) $2 + \sqrt{5}$ e) Ninguna de las anteriores

## Solución

Sea $s$ la longitud del lado del pentágono. Calcularemos el área del pentágono de dos formas. El área es la suma de las áreas de los triángulos $\Delta AOE, \Delta ODE, \Delta CDO, \Delta BCO, \Delta ABO$. Estos triángulos son congruentes, de base $s$ y altura 1. El área del pentágono es $5s/2$. Por otra parte, el área del pentágono es la suma de las áreas de los triángulos $\Delta ADE, \Delta ACD, \Delta ABC$ de base s y altura $\overline{AQ}, \overline{AP}, \overline{AR}$ respectivamente. El área es:




$$\frac{s}{2}(AQ + AP + AR)$$

lo que implica que

$$AQ + AP + AR = 5$$

y

$$AQ + AO + AR = 4\,.$$

La respuesta correcta es la alternativa (**c**).

**20.** Los cuatro lados de un cuadrilátero $ABCD$ son tangentes a una circunferencia y las longitudes de sus lados son $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$. El perímetro del cuadrilátero es:

a) $2(a + b)$ b) $2(a + c)$ c) $4a$ d) $2(c + d)$

e) Ninguna de las anteriores

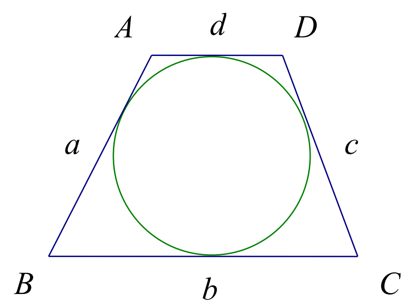
### Solución

Recuerde que un cuadrilátero $ABCD$ es circunscriptible a una circunferencia si y sólo si:

$$AB + CD = BC + AD$$

ó

$$a + c = b + d\,.$$




Pero el perímetro del cuadrilátero es:

$$\begin{aligned} p &= AB + CD + BC + AD \\ &= a + c + b + d\,. \end{aligned}$$

Por el resultado enunciado arriba,

$$(a + c) + (b + d) = (a + c) + (a + c)$$

de donde

$$p = 2(a + c)\,.$$

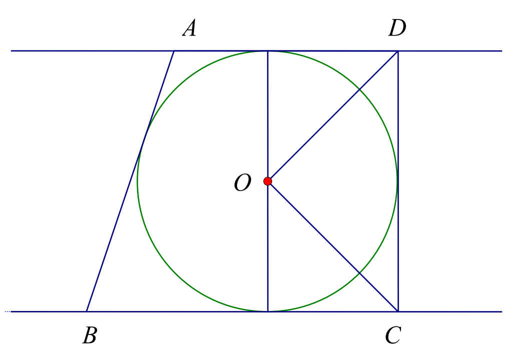
La respuesta correcta es la alternativa (**b**).

**21.** Una circunferencia de centro $O$ está inscrita en un cuadrilátero $ABCD$. Si los lados $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ son paralelos, la magnitud del ángulo formado por los segmentos $\overline{OD}$ y $\overline{OC}$ es:

a) 90º b) 60º

c) 45º d) 30º

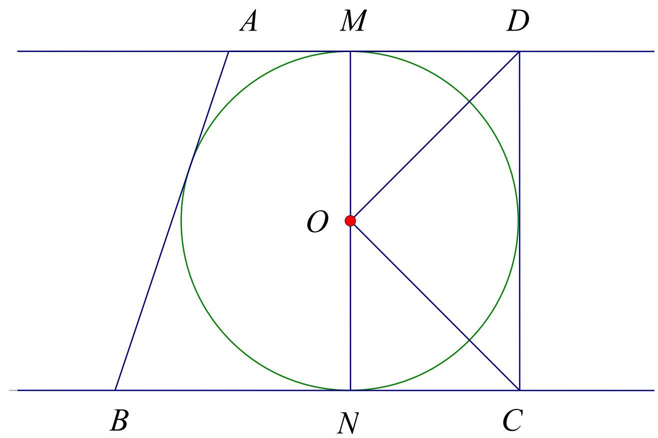
e) Ninguna de las anteriores



## Solución

Como $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$ son paralelos y tangentes a la circunferencia en $M$ y $N$ respectivamente, entonces $m\angle MON = 180º$. Si $m\angle ODM = x$, $m\angle NCO = y$ es que $m\angle OCD = x$, $m\angle CDO = y$, por ser $\overline{MD}$, $\overline{NC}$ y $\overline{CD}$ tangentes a la circunferencia trazadas desde $C$ y $D$ respectivamente. Los ángulos del triángulo $\Delta DOC$ verifican que

$$x + y + m\angle DOC = 180º. \qquad (1)$$




Pero,

$$m\angle MON = 180º$$

y

$$\begin{aligned} m\angle MON &= m\angle CON + m\angle DOC + m\angle MOD \\ 180º &= (90º - y) + m\angle DOC + (90º - x) \\ &= [180º - (x+y)] + m\angle DOC. \end{aligned}$$

Luego,

$$m\angle DOC = x + y$$

y sustituyendo en (1) obtenemos:

$$m\angle DOC = 90º.$$

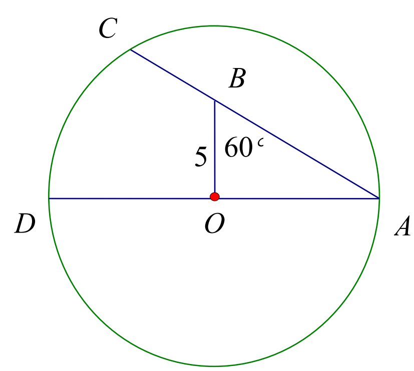
La respuesta correcta es la alternativa (**a**).

**22.** En una circunferencia de centro $O$, $\overline{AD}$ es un diámetro, $\overline{AC}$ es una cuerda, $BO = 5$ y la medida del ángulo $\angle ABO$ y del arco $\widehat{CD}$ es 60º.

La longitud del segmento $\overline{BC}$ es:

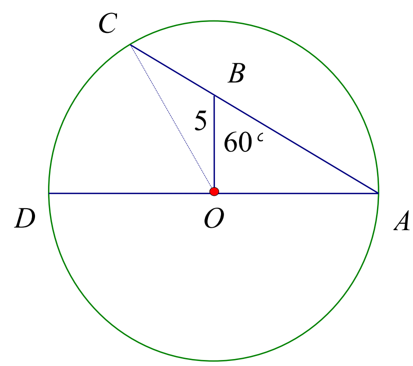
a) 3 b) $3 + \sqrt{3}$ c) $5 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

d) 5 e) Ninguna de las anteriores



## Solución

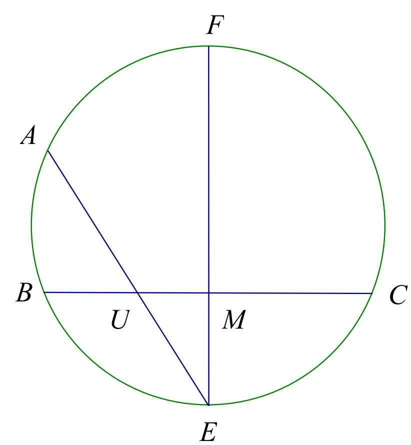
Como la medida del arco $\overset{\frown}{CD}$ es 60º, la medida del ángulo inscrito en la circunferencia es 30º. Trácese el segmento $\overline{CO}$, el triángulo $\Delta ACO$ es isósceles, lo que implica que los ángulos $\angle ACO$ y $\angle DAC$ son congruentes.




Considérese ahora el triángulo $\Delta BCO$ y el ángulo exterior en $B$. Por el Teorema del Ángulo Exterior, la medida del ángulo $\angle COB$ es $60º - 30º = 30º$. Luego, el triángulo $\Delta BCO$ es isósceles y la medida del segmento $\overline{BC}$ es 5.

La respuesta correcta es la alternativa (**d**).

**23.** La cuerda $\overline{EF}$ es la mediatriz de la cuerda $\overline{BC}$ y se interceptan en $M$. Entre los puntos $B$ y $M$ se toma un punto $U$ y $\overline{EU}$ se extiende hasta que intercepte a la circunferencia en un punto que designaremos $A$. Entonces, para cualquier escogencia del punto $U$ como se ha descrito, el triángulo $\Delta MUE$ es semejante al triángulo:




a) $\Delta ABM$ b) $\Delta CFE$ c) $\Delta ABC$

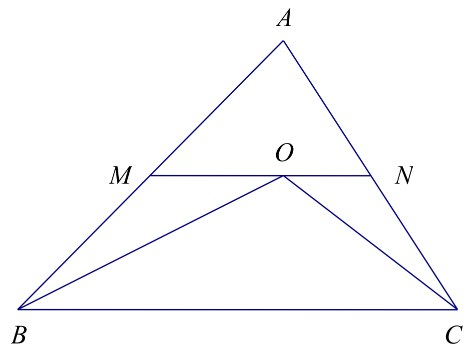
d) $\Delta EFA$ e) Ninguna de los anteriores

## Solución

Note que el triángulo $\Delta MUE$ es rectángulo. Cualquier otro triángulo semejante deberá ser rectángulo. Consideremos el triángulo $\Delta EFA$, que es rectángulo ya que el ángulo $\angle FAE$ es recto. Como el ángulo $\angle AEF$ es común a ambos triángulos, los triángulos son semejantes.

La respuesta correcta es la alternativa (**d**).

**24.** En la figura $\overline{BO}$ biseca al ángulo $\angle ABC$, $\overline{CO}$ biseca al ángulo $\angle BCA$ y $\overline{MN}$ es paralelo a $\overline{BC}$. Si $AB = 12$, $BC = 24$ y $AC = 18$, entonces el perímetro del triángulo $\Delta AMN$ es:




a) 30 b) 33 c) 36

d) 39 e) 42

## Solución

Como $\overline{OB}$ biseca al ángulo $\angle ABC$ y $\overline{OC}$ biseca al ángulo $\angle BCA$ entonces, por ser ángulos alternos internos

$$m\angle MBO = m\angle BOM$$

y

$$m\angle OCN = m\angle NOC.$$

Luego, los triángulos $\Delta MBO$ y $\Delta OCN$ son isósceles y

$$\begin{aligned} OM + MA &= MB + MA = 12 \\ ON + NA &= NC + NA = 18 \end{aligned}$$

por lo que el perímetro del triángulo $\Delta AMN$ es $12 + 18 = 30$.

La respuesta correcta es la alternativa (**a**).

**25.** Un cuadrado de lado de longitud 1 se gira 45º con respecto a uno de sus lados. Entonces el área común a los dos cuadrados mide en unidades cuadradas:

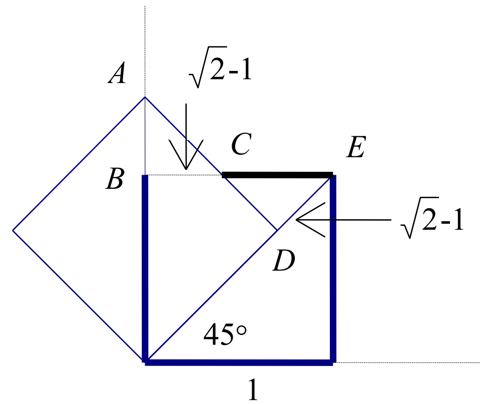
a) $2-\sqrt{2}$ b) $\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$ c) $\dfrac{1}{2}$ d) $\sqrt{2}-1$ e) $\dfrac{3-2\sqrt{2}}{2}$

## Solución

La diagonal del cuadrado mide $\sqrt{2}$. Los triángulos $\Delta ABC$ y $\Delta CDE$ son congruentes ya que son isósceles 45º- 45º- 90º, sus catetos miden $\sqrt{2}-1$ y su base $2-\sqrt{2}$.

El área común a los dos cuadrados es

$\left(\frac{1}{2}\right)$ área del cuadrado – área del triángulo.




O sea,

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)^2=\frac{1}{2}\left[1-(\sqrt{2}-1)^2\right]$$

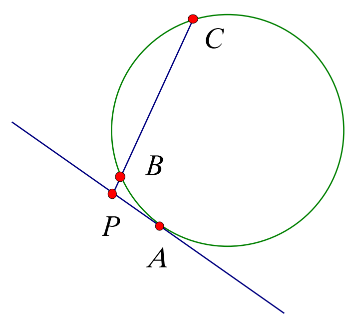
lo que es igual a

$$\frac{1}{2}[1-2+2\sqrt{2}-1]=\frac{1}{2}[2\sqrt{2}-2]=\sqrt{2}-1.$$

La respuesta correcta es la alternativa (**d**).

**26.** Considérese la figura. Supongamos que la medida del arco $\overset{\frown}{BA}$ es $a$, la del arco $\overset{\frown}{CB}$ es $b$, y la del arco $\overset{\frown}{AC}$ es $c$ y estos números satisfacen la proporción:

$$a:b:c=1:4:7.$$




Además las rectas $\overleftrightarrow{AP}$, $\overleftrightarrow{BC}$ son tangente y secante respectivamente a la circunferencia dada, entonces la medida del ángulo $\angle P$ es:

a) 180º b) 90º c) 60º d) 45º

e) Ninguna de los anteriores

### Solución

De acuerdo a la proporción de los arcos tenemos que

$$\begin{aligned} a+b+c &= a+4a+7a \\ &= 360^{\circ} \end{aligned}$$

y por lo tanto,

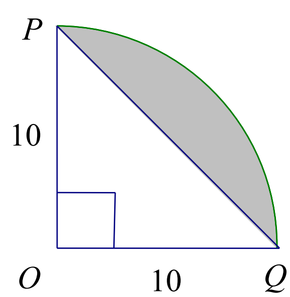
$$a=30^{\circ}, \quad b=120^{\circ}, \quad c=210^{\circ}.$$

Así,

$$\begin{aligned} m\angle P &= \frac{1}{2}(210^{\circ}-30^{\circ}) \\ &= 90^{\circ}. \end{aligned}$$

La respuesta correcta es la alternativa (**b**).

**27.** En la figura, $\overset{\frown}{QP}$ corresponde al arco de una circunferencia de radio 10. El área de la región sombreada es:




a) $50-25\pi$ b) $50\pi-50$ c) $25\pi-50$

d) $50\pi-100$ e) Ninguna de los anteriores

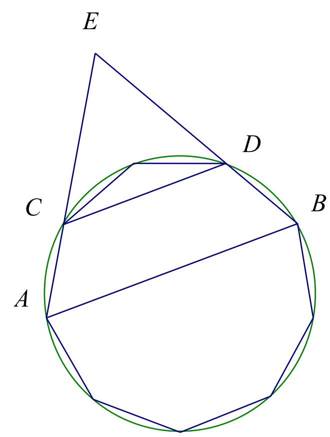
### Solución

Basta observar al figura. Se trata de un cuarto de circunferencia que contiene a un triángulo isósceles de cateto de longitud 10. El área de la región sombreada es igual a:

$$\frac{1}{4}\pi r^2 - \frac{1}{2}r^2 = 25\pi - 50.$$

La respuesta correcta es la alternativa (**c**).

**28.** Considere el nonágono regular en la figura, donde $\overline{AB}$ es una diagonal mayor y $\overline{CD}$ es una diagonal menor. Si por $A$ y $C$, $B$ y $D$ se trazan rectas que se interceptan en un punto $E$, los triángulos $\Delta CDE$ y $\Delta ABE$ son:




a) acutángulos b) rectángulos c) equiángulos
d) obtusángulos

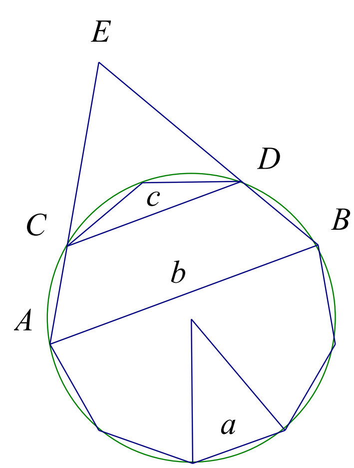
### Solución

En la figura, los lados $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ del nonágono regular se han extendido hasta encontrarse en un punto $E$. El nonágono se encuentra inscrito en una circunferencia. Cada lado del nonágono subtiende un arco de medida 40º (= $360^\circ/9$). Luego,

$$\begin{aligned} m\angle CAB &= m\angle ABD \\ &= \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 40^\circ \\ &= 60^\circ . \end{aligned}$$

Como la recta $\overleftrightarrow{AB}$ es paralela a la recta $\overleftrightarrow{CD}$, los triángulos $\Delta CDE$ y $\Delta ABE$ son equiláteros.

La respuesta correcta es la alternativa (**c**).



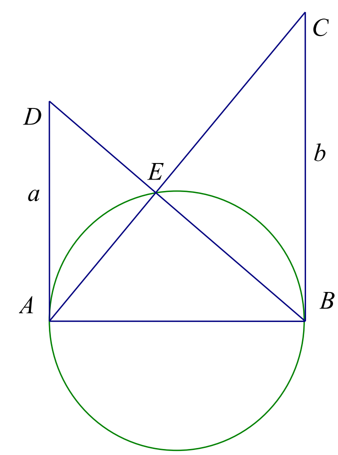

*Nota*: Además, si denotamos por $a$, la longitud del lado del polígono, por $b$ la longitud de la diagonal mayor y por $c$ la longitud de la diagonal menor entonces:

$$b = a + c .$$

En efecto, basta notar que:

$$\begin{aligned} b &= AB \\ &= AE \\ &= AC + CE \\ &= AC + CD \\ &= a + c\,. \end{aligned}$$

**29.** Sea $\overline{AB}$ el diámetro de una circunferencia. Se trazan rectas tangentes $\overleftrightarrow{AD}$ y $\overleftrightarrow{BC}$ por $A$ y $B$ respectivamente de tal manera que $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ se interceptan en un punto de la circunferencia. Si $AD = a$, $BC = b$, $a \neq b$, la longitud del diámetro de la circunferencia es:




a) $|a-b|$ b) $\frac{1}{2}(a-b)$ c) $\sqrt{ab}$

d) $\dfrac{ab}{a+b}$ e) Ninguna de los anteriores

## Solución

Denotemos por $E$ al punto de intersección de los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$. Como las rectas $\overleftrightarrow{AD}$ y $\overleftrightarrow{BC}$ son tangentes a la circunferencia en los puntos $A$ y $B$ respectivamente, del diámetro $\overline{AB}$, ellas son paralelas.

El ángulo $\angle BEA$ está inscrito en una semi-circunferencia, lo que nos dice que los segmentos $\overline{BD}$ y $\overline{AC}$ son perpendiculares. Los ángulos $\angle BCA$ y $\angle DAC$ son congruentes por ser alternos internos. Consecuentemente los ángulos $\angle BDA$ y $\angle DBC$ son congruentes y los triángulos $\Delta ABC$ y $\Delta ABD$ semejantes, por lo cual

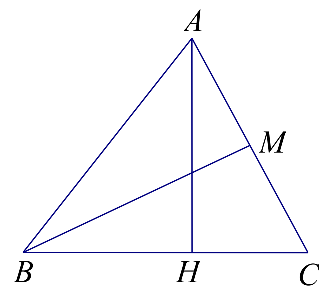
$$\frac{AB}{b} = \frac{a}{AB}$$

o equivalentemente

$$AB = \sqrt{ab}\,.$$

La respuesta correcta es la alternativa (**c**).

**30.** En el triángulo $\Delta ABC$, $m\angle A = 100º$, $m\angle B = 50º$, supongamos que $\overline{AH}$ es una altura del triángulo y $\overline{BM}$ es una mediana. Entonces la medida del ángulo $\angle MHC$ es:




a) 15.0º b) 22.5º c) 30.0º
d) 40.0º e) 45.0º

### Solución

La medida del ángulo $\angle MHC$ es 30º. Como el ángulo $\angle BHA$ es recto, el ángulo $\angle HAB$ mide 40º. Por lo tanto, el ángulo $\angle CAH$ mide 60º. Esto significa que el triángulo $\Delta HCA$ es un triángulo 30º-60º-90º. Los segmentos $\overline{AM}$ y $\overline{AH}$ son congruentes y la medida del ángulo $\angle AHM$ es 60º, lo que establece el resultado.

La respuesta correcta es la alternativa (**c**).

# Misceláneos - Soluciones

## Problemas Misceláneos - Soluciones

**1.** Si un tablero de ajedrez (64 cuadrados: 32 negros y 32 blancos) se descompone en $n$ rectángulos que no se traslapan y que cumplen las siguientes condiciones:

- todo rectángulo tiene igual número de cuadrados blancos que de negros
- si $a_i$ es el número de cuadrados negros en el rectángulo $i$-ésimo, entonces

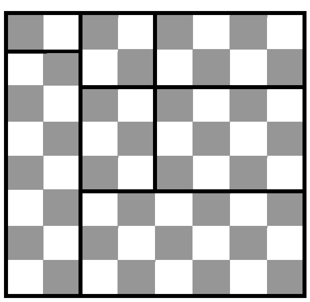
  $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ .

El máximo $n$ para que se cumpla esto es:

a) 6 b) 7 c) 8 d) 9

### Solución

Un tablero de ajedrez se puede dividir en 7 rectángulos que satisfacen las condiciones del problema según la figura siguiente.



En el primer rectángulo (esquina superior izquierda) $a_1 = 1$, en el segundo rectángulo (cuadrado superior) $a_2 = 2$, en el tercer rectángulo (centro) $a_3 = 3$, en el cuarto rectángulo (esquina superior derecha), $a_4 = 4$, en el quinto (centro derecho) $a_5 = 6$. En el sexto rectángulo (esquina inferior izquierda) $a_6 = 7$ y en el séptimo rectángulo (esquina inferior derecha) $a_7 = 9$.

Si hubiesen 8 rectángulos que satisficieran las condiciones dadas, el valor mínimo que tendría los $a_n$ sería $n$, con lo cual la suma de todos los cuadrados daría

$$2(1+2+\cdots+8) = 2\frac{(1+8)8}{2} = 72$$

pero el tablero de ajedrez sólo tiene 64 cuadros.

La respuesta correcta es la alternativa (**b**).

**2.** La solución de la ecuación exponencial

$$7\cdot 4^{x-2}+5\cdot 4^{x-1}-3\cdot 4^{x}-2\cdot 4^{x+1}-9=-158$$

es:

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4

e) Ninguna de las anteriores

**Solución**

Note que

$$\begin{aligned}7\cdot 4^{x-2}+5\cdot 4^{x-1}-3\cdot 4^{x}-2\cdot 4^{x+1}-9&=-158\\ 4^{x-2}(7+5\cdot 4-3\cdot 4^{2}-2\cdot 4^{3})&=-158+9\\ 4^{x-2}(7+20-48-128)&=-149\\ 4^{x-2}(-149)&=-149\,.\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$4^{x-2}=1\,.$$

Lo que implica que $x=2$.

La respuesta correcta es la alternativa (**b**).

**3.** Si $\log_5(\log_2(\log_3 x))=0$, entonces $x^{-1/2}$ es:

a) $\frac{1}{2}$ b) 4 c) $\frac{1}{3}$ d) 9

e) Ninguna de las anteriores

**Solución**

Por la inyectividad de la función logaritmo tenemos que si

$$\log_5(\log_2(\log_3 x))=0=\log_5 1$$

entonces,

$$\log_2(\log_3 x) = 1 = \log_2 2$$

de ahí que:

$$\log_3 x = 2$$

o equivalentemente

$$x = 3^2$$

de donde

$$x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}.$$

La respuesta correcta es la alternativa (**c**).

**4.** Se tienen 18 bolas del mismo tamaño y color, pero una de ellas pesa diferente. El número mínimo de comparaciones en una balanza para detectar con seguridad la bola diferente es:

a) 3 b) 4 c) 5 d) 6 e) 7

### Solución

Dividimos las 18 bolas en tres grupos $A$, $B$ y $C$ de seis bolas cada uno. Si comparamos los grupos $A$ y $B$, tenemos dos posibilidades:

i) $A$ y $B$ tienen igual peso.
ii) $A$ y $B$ tienen pesos distintos.

Estudiamos el caso i). Si $A$ y $B$ tienen igual peso, la bola diferente está en $C$. De las bolas de $C$ tomemos 5 y comparémoslas con 5 bolas normales de los grupos $A$ o $B$.

- Si esas tienen igual peso, la bola de $C$ que no fue tomada es la diferente, hasta aquí se ha usado la balanza dos veces.
- Si no tienen igual peso, en el grupo de 5 bolas de $C$ está la diferente. Dividamos este grupo en un grupo de 3 y otro de 2 bolas.

Pesamos el grupo de 3 bolas con otras 3 bolas de peso normal. Si coinciden, usando la balanza una vez más para comparar una de las dos bolas restantes con una de peso normal se obtiene la diferente. Si pesan distinto (más o menos) usando la balanza con dos de las bolas bajo inspección encontramos la distinta. En cualquier caso se usó la balanza 4 veces.

Estudiemos el caso ii) si $A$ y $B$ tienen pesos diferentes eso significa que las 6 bolas de $C$ tienen peso normal. Comparemos $A$ y $C$. Si tiene igual peso, la bola diferente está en $B$ y repetimos el proceso descrito en i). Si $A$ y $C$ tienen peso distinto, la bola diferente está en $A$ y se repite el proceso descrito en i) para encontrarla. Se usó la balanza 4 veces.

En conclusión para determinar con seguridad una bola diferente de un grupo de 18 bolas, deberá usarse la balanza 4 veces.

La respuesta correcta es la alternativa (**b**).

**5.** Si $\tan\alpha$ y $\tan\beta$ son raíces de la ecuación $x^2 - px + q = 0$, $\cot\alpha$ y $\cot\beta$ son raíces de $x^2 - rx + s = 0$, entonces $rs$ es igual a:

a) $pq$ b) $\dfrac{1}{pq}$ c) $\dfrac{p}{q^2}$ d) $\dfrac{q}{p^2}$

e) Ninguna de las anteriores

### Solución

Por las relaciones de Viete:

$$\tan\alpha + \tan\beta = p \qquad \cot\alpha + \cot\beta = r$$
$$\tan\alpha \cdot \tan\beta = q \qquad \cot\alpha \cdot \cot\beta = s$$

Pero

$$r = \frac{1}{\tan\alpha} + \frac{1}{\tan\beta} = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{\tan\alpha \cdot \tan\beta} = \frac{p}{q},$$

$$s = \frac{1}{\tan\alpha} \cdot \frac{1}{\tan\beta} = \frac{1}{q}$$

luego,

$$rs = \frac{p}{q^2}$$

La respuesta correcta es la alternativa (**c**).

**6.** Al final de una reunión social entre amigos las damas se despiden del resto de damas y varones con un beso, mientras que los varones se despiden entre sí con un apretón de manos. Entendiendo que todos se saludaron y al final hubo 108 besos y 28 apretones de mano, entonces en la reunión, habían:

a) 14 damas y 8 varones
b) 9 damas y 8 varones
c) 11 damas y 8 varones
d) 9 damas y 14 varones
e) 8 damas y 14 varones

### Solución

Calculando los apretones de mano entre los varones, con dos varones hay un apretón. Con tres varones hay tres apretones. Con cuatro, hay seis apretones y así sucesivamente. Con ocho, hay 28 apretones. Así determinamos que hay ocho varones.

Luego para 1 dama y 8 varones se tienen 8 besos, con 2 y 8, 8 + 8+ 1 besos. Con 3 y 8, 8 + 8 + 8 + 3 besos y así sucesivamente, como hubo 108 besos entonces habían 9 damas.

La respuesta correcta es la alternativa (**b**).

**7.** Al lanzar un par de dados, la probabilidad de que la suma de los puntos no sea 7, ni 8, ni 9 es:

a) $\frac{5}{12}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{2}{3}$ d) $\frac{7}{12}$ e) $\frac{1}{3}$

## Solución

La suma es 7 si obtenemos 5, 2; 2, 5; 3, 4; 4, 3; 6, 1 y 1, 6

La suma es 8 si obtenemos 4, 4; 6, 2; 2, 6; 5,3; 3, 5

La suma es 9 si obtenemos 4, 5; 5, 4; 6, 3; 3, 6

La probabilidad de que la suma sea 7 es $\frac{6}{36}$ ; la probabilidad de que la suma sea 8 es $\frac{5}{36}$ y la probabilidad de que la suma sea 9 es $\frac{4}{36}$. Luego la probabilidad de que la suma no sea ni 7, ni 8, ni 9 es

$$1-\left(\frac{6}{36}+\frac{5}{36}+\frac{4}{36}\right)=\frac{7}{12}$$

La respuesta correcta es la alternativa (**d**).

**8.** A un baile asistieron 25 personas. Ana bailó con 6 muchachos, Alma con 7, Nidia con 8, y así hasta llegar a la última muchacha la cual fue la única que bailó con todos los muchachos. El número de muchachos que había en el baile es:

a) 9 b) 10 c) 11 d) 12 e) 15

## Solución

La primera muchacha bailó con $6 = 5 + 1$ muchachos. La segunda muchacha bailó con $7 = 5 + 2$ muchachos. La $n$-ésima y última bailó con $5 + n$ muchachos (todos los muchachos). Como el número de muchachos y muchachas es 25, se tiene:

$$\begin{aligned} (5+n)+n &= 25 \\ 2n &= 20 \\ n &= 10\,. \end{aligned}$$

Así, el número de muchachos es $25 - 10 = 15$ .

La respuesta correcta es la alternativa (**e**).

**9.** Se tiene una balanza de dos platos y tres discos de 1, 2 y 5 libras respectivamente. ¿Cuántos objetos de diferentes pesos pueden balancearse, utilizando solamente estos discos, si los objetos y los discos se pueden colocar en cualquiera de los dos platos?

a) 6 b) 7 c) 8 d) 10 e) 13

### Solución

Con los discos tomados individualmente podemos pesar tres objetos de peso 1 lb, 2 lb y 5 lb. Un vez finalizado este proceso, podemos pesar objetos de peso:
3 lb (1 + 2 = 3), 4 lb (1 + 4 = 5), 6 lb (1 + 5 = 6), 7 lb (2 + 5 = 7) y 8 lb (1 + 2 + 5 = 8).
En total podemos pesar 8 objetos de peso entre 1lb y 8 lb.

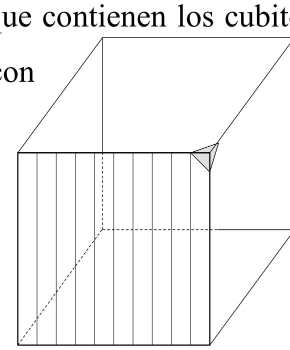
La respuesta correcta es la alternativa (**c**).

**10.** Un cubo, cuyas caras están pintadas, se ha dividido en mil cubos más pequeños de igual dimensión y se han mezclado en una bolsa. La probabilidad de que un cubo tomado al azar tenga exactamente dos caras pintadas es:

a) 0.008 b) 0.032 c) 0.064 d) 0.096 e) 0.12

### Solución

El número total de cubitos es 1000 y cada una de las 12 aristas (bordes) del cubo está dividida en 10 partes iguales. Cada uno de los 12 bordes son los que contienen los cubitos con caras de 2 ó 3 colores. En cada borde hay sólo 8 cubitos con exactamente 2 colores (los de las esquinas tiene 3 colores), luego hay $12\times 8 = 96$ cubitos con exactamente dos colores y la probabilidad es



$$\frac{96}{1000} = 0.096$$

La respuesta correcta es la alternativa (**d**).

**11.** Se construye un polígono regular de $n$ lados ($n \geq 3$) y se enumeran sus vértices de 1 a $n$. Se trazan todas las diagonales del polígono. Demostrar que si $n$ es impar, se puede asignar a cada lado y a cada diagonal un número entero de 1 a $n$, tal que se cumplan simultáneamente las siguientes condiciones:

1. El número asignado a cada lado o diagonal sea distinto a los asignados a los vértices que une.
2. Para cada vértice, todos los lados y diagonales que compartan dicho vértice tengan números diferentes.

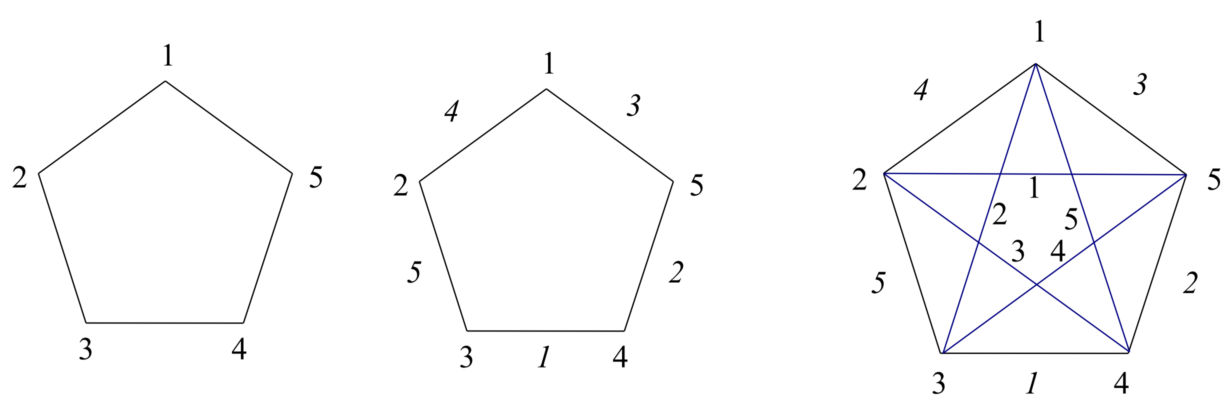
**Solución** de Henry Wong Kiao del Equipo de Panamá

Es obvio que la cantidad de números a asignar por cada vértice es igual a la cantidad de lados del polígono, y que de cada vértice salen $n-1$ componentes (lados y diagonales) del polígono.

Se procede a la construcción del algoritmo que permita lo solicitado.

i) Al dibujar el polígono de lados impares ($n \geq 3$) se le asigna arbitrariamente números a cada vértice.
ii) A continuación a los lados opuestos se le asigna el mismo número.
iii) Las diagonales paralelas a ese lado tienen el mismo número.

Veamos como ejemplo el caso $n = 5$ de izquierda a derecha.



**12.** Inés eligió cuatro dígitos del conjunto $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Formó con ellos todos los posibles números de cuatro cifras distintas y sumó todos esos números de cuatro cifras. El resultado es 193314. Halle los cuatros dígitos que eligió Inés.

### Solución

Sean $a$, $b$, $c$ y $d$ los dígitos que eligió Inés. Cada dígito aparecerá la misma cantidad de veces en las unidades, las decenas, las centenas y las unidades de mil: 6 veces.

La suma de Inés es:

$$S = 6(a+b+c+d)1111 = 193314$$

entonces:

$$a+b+c+d = 29\,.$$

La única manera de escribir 29 como la suma de cuatro dígitos distintos es

$$29 = 5 + 7 + 8 + 9,$$

entonces los dígitos que eligió Inés son 5, 7, 8, 9.

### Solución de Carlos Palacios

Se sabe que cada uno de los dígitos que Inés eligió ocupará 6 veces una posición, así que busqué cuáles dígitos multiplicados por 6 tienen que la suma de su primer dígito sea 4.
Ejemplo: 1, 3, 4, 6

$$\begin{array}{ll} 1\cdot 6 = \phantom{0}6 & \\ 3\cdot 6 = 18 & \\ 4\cdot 6 = 24 & 6+8+4+6 = 2\underline{4} \\ 6\cdot 6 = 36 & \end{array}$$

Su suma da 84, el resultado termina con 4 y sube el 8, a sumar todo o sea 8 + 84 obtengo 92, esto dice que el penúltimo número es 2 por lo que no puede ser la combinación.

Probé con distintas combinaciones y la que resultó fue 5, 7, 8, 9

$$5 \cdot 6 = 30$$
$$7 \cdot 6 = 42$$
$$8 \cdot 6 = 48$$
$$9 \cdot 6 = 54$$

174 es la suma de cada dígito multiplicado por 6 que es la cantidad de veces que debe aparecer un dígito en una posición. El último dígito es 4 y sube 17 y se le suma a todo el resultado, o sea 17 + 174 = 191. Esto quiere decir que el penúltimo es 1, sube 19 y se le suma a todo, o sea 19 + 174 = 193. El antepenúltimo dígito es 3 y sube el 19 esto se le suma a la posición que faltaba, o sea 19 + 174 = 193 y 193 son los tres primeros dígitos. Por lo tanto, los tres primeros 193, antepenúltimo 3, penútimo1 último 4. El número es 193314.

**13.** Dos jugadores *A, B* y otras 2001 personas forman un círculo, de modo que *A* y *B* no quedan en posiciones consecutivas. *A* y *B* juegan por turnos alternadamente empezando por *A*. Una jugada consiste en tocar a una de las personas que se encuentra a su lado, la cual debe salir del círculo. Gana el jugador que logre sacar del círculo a su oponente.
Demostrar que uno de los dos jugadores tiene una estrategia ganadora y describir dicha estrategia.

*Nota*: Un jugador tiene una estrategia ganadora si puede garantizar su victoria sin importar cómo juegue su rival.

**Solución** de Daniel Arévalo del Equipo de Panamá

La estrategia ganadora la tiene el jugador que primero empieza, en este caso el jugador *A*.

Tenemos 2003 participantes, contando a los jugadores *A* y *B*. Como no son consecutivos y son un número impar de jugadores tenemos que a un lado de *A* hay un número par de jugadores antes de llegar a *B*, y al otro lado hay un número impar de jugadores antes de llegar a *B* (esto es la clave del problema ya que cada dos jugadas una de *A* y una de *B* se mantendrá la misma situación ).

Supongamos que $A$ comienza por el lado par y $B$ también. Llega el momento en que $A$ ha movido $m + 1$ veces y $B$ ha movido $m$ veces, ya que si mueve $m + 1$ veces quedará al lado de $A$, y luego como es el turno de $A$, éste ganará. Como sabemos que $B$ también quiere ganar, se irá por el otro lado, o sea por el lado impar de jugadores antes de llegar donde $A$. Como $B$ es el que hace la primera jugada en este lado, la nueva distancia que va a haber entre $A$ y $B$ es par, luego es el turno de $A$ y pasará lo mismo que pasó en el caso anterior ($A$ mueve $m + 1$ veces y $B$ mueve $m$ veces).

Al final podemos decir que $B$ esta arrinconado porque hay un jugador a cada lado que lo separan de $A$, así que por cualquier lado que $B$ juegue, $A$ ganará.

Ahora supongamos que escogen cualquier lado, sin ningún patrón sólo una jugada cada uno. Eventualmente llegaremos al caso en que sólo los separará un jugador a $A$ y a $B$. Luego tendremos el turno de $B$, quien saca al jugador restante y $A$ gana.

En conclusión, para que $A$ tenga una estrategia ganadora basta que mantenga un jugador entre él y $B$ hasta el final del juego.

# Referencias Bibliográficas

A continuación aparece un listado de libros que esbozan los principios básicos de la resolución de problemas. En ellos encontrará la guía para transcribir los datos proporcionados en expresiones analíticas y las técnicas para manipular estas expresiones hasta encontrar la solución del problema.


**1** Chen Chuan-Chong and Koh Khee-Meng, *Principles and Techniques in Combinatories*, World Scientific, Singapore, 1992.

**2** John P. D'Angelo and Douglas B. West, *Mathematical Thinking: Problem-Solving and Proofs*, 2nd Ed., Prentice Hall, New Jersey, 1997.

**3** Miklós Laczkovich, *Conjectures and Proof*, The Mathematical Association Of America, Washington, D.C., 2001.

**4** Steven G. Krantz, *Techniques of Problem Solving*, American Mathematical Society, Rhode Island, 1997.

**5** George Polya, *How To Solve It*, 2nd ed., Princeton University Press, New Jersey, 1973.

**6** George Polya, *Mathematical Discovery - On Understanding, Learning, and Teaching Problem Solving*, John Wiley and Sons, New Jersey, 1982.

**7** J.B. Tabov and P. J. Taylor, *Methods of Problem Solving – Book 1*, Australian Mathematics Trust, Canberra, 1999.

**8** Alan H. Schoenfeld, *Mathematical Problem Solving*, Academic Press, Orlando, 1985.

**9** Alan H. Schhoenfeld, *Problem Solving in the Mathematical Curriculum*, The Mathematical Association of America, Washington D.C., 1983.

Olimpiada Panameña de Matemática