



FUNDACIÓN
OLIMPIADA PANAMEÑA
DE MATEMÁTICA

Manual de Olimpiadas

Guía de estudio para el alumno



Lydia O. Burgoa M.
2012

FUNDACIÓN
OLIMPIADA PANAMEÑA
DE MATEMÁTICA

El material expuesto en este manual servirá de preparación al estudiante que se inicia en competencias de Matemática.

Publicación conjunta: Secretaría Nacional de Ciencia, Tecnología e
Innovación – SENACYT
Fundación Olimpiada Panameña de Matemática
Compilación y Edición: Lydia O. Burgoa M.
Diagramación: Lydia O. Burgoa M.
Diseño de Cubierta: Isabel Aguirre
Impresión:
Tiraje: 1 000 ejemplares

510.7

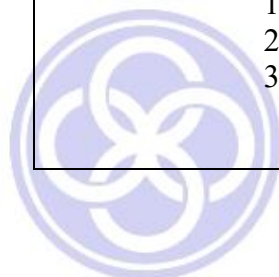
B915m Burgoa Medina, Lydia O.

Manual de Olimpiadas : guía de estudio para el alumno /
Lydia O. Burgoa Medina. – Panamá : Fundación Olimpiada
Panameña de Matemáticas, 2012.

80p. ; 22 cm.

ISBN 978-9962-8993-1-0

1. MATEMÁTICAS – GUÍAS DE ESTUDIO
2. OLIMPIADAS DE MATEMÁTICAS – PANAMÁ
3. MATEMÁTICAS – ENSEÑANZA I. Título.



OLIMPIADA PANAMEÑA
DE MATEMÁTICA

2000 Mathematics Subject Classification: 00-01, 00A07, OOA35

Lydia O. Burgoa M.
Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y Tecnología
Universidad de Panamá

Fundación Olimpiada Panameña de Matemática
Urbanización Dos Mares, Edificio Dos Mares View
Panamá, República de Panamá
<http://fundación.opm.org.pa>

© SENACYT
© FUNDACIÓN OLIMPIADA PANAMEÑA DE MATEMÁTICA
© Lydia O. Burgoa M.; 2012
Reservados todos los derechos.

Este folleto, o sus partes, no puede ser reproducido ni transmitido en forma alguna por cualquier medio, electrónico, mecánico o de almacenaje de información, incluyendo su fotocopia o grabación, por cualquier medio conocido o por inventar, sin el previo permiso escrito de la Fundación Olimpiada Panameña de Matemática y la Secretaría Nacional de Ciencia, Tecnología e Innovación.

∞ *Tabla de Contenido*

Presentación.....	v
.....	
Sección 1.	1
Divisibilidad.....	
Sección 2.	1
Paridad.....	2
 Sección 3. Temas de	1
Álgebra.....	4
 Sección 4. Ángulos y	2
Triángulos.....	5
 Sección 5.	3
Polígonos.....	6
 Sección 6. Circunferencia y	4
Círculo.....	3
 Sección 7. Elementos de la Teoría Combinatoria y Principio de las	5
Casillas.....	2
 Sección 8. Otros	6
Temas.....	1



FUNDACIÓN
OLIMPIADA PANAMEÑA
DE MATEMÁTICA

Presentación:

El objetivo principal de esta publicación es fomentar el estudio de la matemática como disciplina que desarrolla capacidades en el estudiante mediante métodos de razonamiento estructurado. Este folleto está dirigido al alumno de pre-media y media que se prepara para la Olimpiada Panameña de Matemática, pero se puede convertir en una ayuda para el docente que entrena a sus estudiantes.

Contiene conceptos básicos, escritos prefiriendo el lenguaje llano en vez de la formalidad, que los ayudarán en la resolución de los problemas de competencias. El material se ha dividido en ocho secciones que abarcan temas incluidos en el temario de la Olimpiada. Cada sección contiene ejercicios de diversos niveles que facilitarán la comprensión y aplicación de los conceptos y resultados presentados. Algunos ejercicios fueron elegidos de tal manera que para su resolución se requiera además, una dosis de ingenio. Los ejercicios propuestos han sido tomados de la Olimpiada Panameña de Matemática o de olimpiadas de otros países.

Los temas expuestos en este manual tienen como objetivo servir de guía para profundizar con sus libros de texto y de ninguna manera se pueden considerar como completos.

Se sugiere al alumno que resuelva los problemas de los libros de la colección *Olimpiadas de Matemática*, publicados por la Fundación Olimpiada Panameña de Matemática, para examinar su dominio de la temática. Con su trabajo, adquiere las dos herramientas esenciales en la resolución de problemas, conocimientos y experiencia.

Agradecemos a todos aquellos, alumnos y profesores, en especial al Prof. Pedro Marrone y al Ing. David Narváez que aportaron material y sugerencias que han enriquecido lo que aquí se expone.

Agradecemos a la Secretaría Nacional de Ciencia, Tecnología e Innovación por la impresión de este manual.



FUNDACIÓN
OLIMPIADA PANAMEÑA
DE MATEMÁTICA

1

DIVISIBILIDAD

Definición *Divisibilidad*

Dados dos números enteros a , b , con $a \neq 0$, se dice que a divide a b que escribimos $a|b$ si existe un entero x tal que $a \cdot x = b$. Si a no divide a b , lo indicamos $a \nmid b$.

Ejemplos:

- 2 divide a 6 porque existe 3 tal que $2 \times 3 = 6$.
- $5|35$ porque $5 \times 7 = 35$.
- $4 \nmid 18$ pues no existe un entero x tal que $4 \cdot x = 18$.
- $3|0$ pues existe 0 tal que $3 \times 0 = 0$.
- $1|7$ pues existe 7 tal que $1 \times 7 = 7$.

Otras formas de expresar que a divide a b son: a es divisor de b ; a es factor de b ; b es divisible por a ó b es un múltiplo de a .

Ejemplo: 2 es divisor de 6; 2 es factor de 6; 6 es múltiplo de 2.

Propiedades

- Si $a|b$ entonces $a|bc$ para todo entero c .
- Si $a|b$ y $b|c$ entonces $a|c$.
- Si $a|b$ y $a|c$ entonces $a|(bx+cy)$ para todo par de números enteros x, y .
- Siempre $1|a$ para cualquier entero a y para todo $a \neq 0$, se tiene $a|a$ y $a|0$.

Ejemplo: $2|6$ y $2|8$ entonces $2|(3 \times 6 + 5 \times 8)$.

Criterios de divisibilidad

Presentamos algunos criterios de divisibilidad que nos permiten encontrar los factores de un número.

-Un número entero es divisible **por 2**, si el dígito de las unidades es par.

Ejemplo: 38 es divisible por 2.

-Un número entero es divisible **por 3**, si la suma de sus dígitos es divisible por 3.

Ejemplo: 243 es divisible por 3.

-Un número entero es divisible **por 4**, si el número formado por los dos últimos dígitos es divisible por 4.

Ejemplo: 724 y 600 son divisibles por 4.



-Un número entero es divisible **por 5**, si el dígito de las unidades es 0 ó 5.

Ejemplo: 230 es divisible por 5.

-Un número entero es divisible **por 6**, si es divisible por 2 y por 3.

Ejemplo: 234 es divisible por 6.

-Un número entero es divisible **por 7**, si es divisible por 7 el número de dos cifras obtenido después de aplicar el siguiente proceso: tomamos el dígito de las unidades y lo duplicamos; el resultado se lo restamos al número original sin el dígito de las unidades; repetimos el proceso hasta obtener un número de dos cifras.

Ejemplo: 322 y 2247 son divisibles por 7.

-Un número entero es divisible **por 8**, si el número formado por sus tres últimos dígitos es divisible por 8.

Ejemplo: 5824 es divisible por 8.

-Un número entero es divisible **por 9**, si la suma de sus dígitos es divisible por 9.

Ejemplo: 513 es divisible por 9.

-Un número entero es divisible **por 10**, si el dígito de las unidades es 0.

Ejemplo: 860 es divisible por 10.

-Un número entero es divisible **por 11**, si obtenemos 0 o un múltiplo de 11 con el siguiente proceso: numeramos todos los dígitos del número de izquierda a derecha. Sumamos todos los dígitos que ocupan los lugares pares y le restamos la suma de todos los números que ocupan lugares impares.

Ejemplo: 121 y 5390 son divisibles por 11.

-Un número entero es divisible **por 12**, si es divisible por 3 y por 4.

Ejemplo: 684 es divisible por 12.

Definición *Números Primos y Compuestos*

- Se dice que un entero positivo p mayor que 1 es un **número primo** si sus únicos divisores positivos son 1 y p .

Ejemplo: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31 son números primos.

- Si un número entero positivo tiene más de dos divisores positivos diferentes, es un **número compuesto**. El número 1 no es ni primo, ni compuesto.

Si un número entero a mayor que 1 tiene la propiedad que ningún número primo menor o igual que $\sqrt{a}$ lo divide, entonces a es primo.

Hay una cantidad infinita de números primos.

Teorema fundamental de la Aritmética

Todo número entero positivo n mayor que 1 puede expresarse como producto de factores primos de forma única:

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$$

donde $p_1, p_2, \dots, p_k$ números primos distintos escritos en orden creciente y $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ son enteros positivos.

Ejercicios

Para saber si entendiste los conceptos expuestos anteriormente, te presentamos unos pocos ejercicios:

Ejercicio 1. ¿2 divide a $2^5 \times 3$?

¿ $2^5 \times 3$ es divisible por 5?

¿ $2^5 \times 3$ es múltiplo de 8?

¿9 es divisor de $2^5 \times 3$?

¿6 es factor de $2^5 \times 3$?

Ejercicio 2. Al eliminar dos dígitos del número 123.456.789 se obtiene un número divisible por 3. ¿Cuáles podemos eliminar?

Ejercicio 3. ¿Cuáles son los pares de números que no contienen ceros que dan 90.000 al multiplicarlos entre sí?

Ejercicio 4. ¿Por cuáles números se puede sustituir la letra a para que el número 975.823.664.2a2 sea divisible por 12?

Ejercicio 5. Considera todos los números naturales que son de la forma $abcabc$ ó $abccba$ donde a, b y c son dígitos, y $a \neq 0$. Encuentra un divisor común distinto de 1, de todos estos números.

Ejercicio 6. Determina si 401 es un número primo.

Ejercicio 7. ¿Cuántos números primos son a la vez la suma y la diferencia de dos números primos?

Ejercicio 8. ¿Es primo alguno de los números 1573, 15731573, 157315731573, ...?

Ejercicio 9. Escribe a 660 como producto de primos.

Ejercicio 10. ¿Cuántos de los siguientes 60 números son múltiplos de 60?

84, 2×84 , 3×84 , 4×84 , ..., 60×84

- Ejercicio 11.** Exactamente una de las afirmaciones siguientes acerca del número de mi casa es falsa.
- a) La suma de las cifras del número es 6.
 - b) Dos de las cifras del número son iguales.
 - c) El número es menor que 110.
 - d) El número es mayor que 40.
 - e) El número es primo.
- ¿Cuál es el número de mi casa?
- Ejercicio 12.** ¿Cuál es el menor número por el que hay que multiplicar 10.800 para que el resultado sea un cubo perfecto?
- Ejercicio 13.** Encuentra el menor número formado por los dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, y 7 tal que la suma de dos dígitos consecutivos cualesquiera es un número primo.
- Ejercicio 14.** Cuando se suman dos números de tres dígitos, $2a3$ y $6b5$ el resultado es un número divisible por 9. ¿Cuál es el mayor valor posible para $a + b$?
- Ejercicio 15.** Considera los números formados por tres dígitos impares distintos, ¿cuántos de ellos son divisibles por 3?
- Ejercicio 16.** Determina todos los números naturales n comprendidos entre 3000 y 4000 que cumplen todas las propiedades siguientes:
- i) n es divisible por 2 pero no por 4
 - ii) n es divisible por 3 pero no por 9
 - iii) n es divisible por 5 pero no por 25
 - iv) n es divisible por 7 pero no por 49.
- Ejercicio 17.** Encuentra los valores enteros de n tal que $\frac{18}{n-2}$ es un número entero.
- Ejercicio 18.** Encuentra el menor entero positivo que tenga 100 divisores incluyendo a 1 y a sí mismo.
- Ejercicio 19.** Encuentra el menor cuadrado perfecto que sea de la forma $aabb$, donde a y b son dígitos.
- Ejercicio 20.** Si a , b y c son dígitos, encuentra cuántos números de la forma $2a0b0c0$ son múltiplos de 36.

1.2 Máximo Común Divisor Y Mínimo Común Múltiplo

Definición Máximo Común Divisor

- El máximo común divisor de varios números naturales es el mayor número que divide a esos números. El máximo común divisor de a y b se denota $mcd(a,b)$.
- El máximo común divisor de dos o más números es el producto de los factores primos comunes elevados al menor exponente.

Ejemplo: Como
$$\left. \begin{array}{l} 30 = 2 \times 3 \times 5 \\ 45 = 3^2 \times 5 \end{array} \right\} \text{ entonces } mcd(30,45) = 3 \times 5 = 15.$$

Propiedad

Si un número es divisor de otros dos, también es divisor del máximo común divisor de esos números.

Si a y b son tales que $mcd(a,b)=1$, a y b se denominan **primos relativos** o **coprimes**.

Ejemplo: 4 y 15 son primos relativos.

Definición Mínimo Común Múltiplo

- El mínimo común múltiplo de varios números naturales es el menor número distinto de cero que es divisible por todos esos números. El mínimo común múltiplo de a y b se denota $mcm(a,b)$.
- El mínimo común múltiplo de dos o más números es el producto de los factores primos comunes y no comunes elevados al mayor exponente.

Ejemplo: Como
$$\left. \begin{array}{l} 168 = 2^3 \times 3 \times 7 \\ 240 = 2^4 \times 3 \times 5 \end{array} \right\} \text{ entonces } mcm(168,240) = 2^4 \times 3 \times 5 \times 7 = 1480.$$

Propiedad

Si observamos, podemos comprobar que se cumple:

$$a \cdot b = mcd(a,b) \cdot mcm(a,b).$$

División Euclidiana:

Para a y b enteros, con $a > 0$ existen enteros q y r tales que $b = aq + r$ y $0 \leq r < a$. El número q se llama cociente y r es el residuo. Además, si a no divide a b , $0 < r < a$.

Ejemplo: Para 4 y 67, $67 = 4 \times 16 + 3$, el cociente es 16 y el residuo 3.

Algoritmo de Euclides

Ahora nos interesaremos en otro método para buscar el máximo común divisor de dos números, el algoritmo de Euclides. Con este método, aparte de encontrar el máximo común divisor, podemos obtener más información. El algoritmo de Euclides consiste en, de forma sucesiva, dividir el número grande entre el pequeño e ir sustituyendo el dividendo por el divisor y el divisor por el residuo, hasta que la división sea exacta. Parece complicado, pero no lo es; veamos el proceso mediante un ejemplo.

Ejemplo: Busquemos el máximo común divisor de 63 y 24.

Dividimos 63 entre 24, obtenemos cociente 2 y residuo, 15.

Dividimos 24 entre 15, obtenemos cociente 1 y residuo, 9.

Dividimos 15 entre 9, obtenemos cociente 1 y residuo, 6.

Dividimos 9 entre 6, obtenemos cociente 1 y residuo, 3.

Dividimos 6 entre 3, obtenemos cociente 2 y residuo, 0.

Vemos que 3, el último residuo distinto de cero, es el máximo común divisor de 63 y 24.

Escribiendo las divisiones en símbolos:

$$63 = 2 \times 24 + 15$$

$$24 = 1 \times 15 + 9$$

$$15 = 1 \times 9 + 6$$

$$9 = 1 \times 6 + 3$$

y despejando,

$$3 = 9 - 6$$

$$= 9 - (15 - 9)$$

$$= 9 \times 2 - 15$$

$$= (24 - 15) \times 2 - 15$$

$$= 24 \times 2 - 15 \times 3$$

$$= 24 \times 2 - (63 - 24 \times 2) \times 3$$

$$= 24 \times 2 - 63 \times 3 + 24 \times 6$$

$$= 24 \times 8 - 63 \times 3$$

$$= 63 \times (-3) + 24 \times 8.$$

Hemos aprendido que el máximo común divisor, d , de dos números a y b puede expresarse en la forma $ax + by = d$. Se usa el algoritmo de Euclides para encontrar los números x e y .

Ejercicios

Vamos a ver si puedes aplicar lo explicado en los siguientes ejercicios:

- Ejercicio 1.** a) Usando la factorización en primos, encuentra el *mcd* de los números 180, 252 y 594. Usando la factorización en primos encuentra el *mcm* de 140, 325 y 490.
- b) Usando la factorización en primos, encuentra el *mcd* y el *mcm* de los números $m = 128$ y $n = 1324$, verifica también que:

$$\text{mcd}(m,n) \cdot \text{mcm}(m,n) = m \cdot n.$$

- Ejercicio 2.** ¿Cuál es el menor entero positivo que cuando se divide por 9, 13 y 18 deja residuo 2?
- Ejercicio 3.** Se quiere envasar 161 kg, 253 kg, y 207 kg de plomo en tres cajas de modo que los bloques de plomo de cada caja tengan el mismo peso y el mayor posible. ¿Cuánto debe pesar cada pedazo de plomo?
- Ejercicio 4.** ¿Cuál es el cociente entre el mínimo común múltiplo de los 40 primeros enteros positivos y el mínimo común múltiplo de los 30 primeros?
- Ejercicio 5.** Reordenar en forma decreciente los siguientes números
 $p = 3^{60}$, $q = 5^{48}$, $r = 6^{36}$ y $s = 7^{24}$.
- Ejercicio 6.** Dado un rectángulo de 70 cm de largo y 80 cm de ancho, ¿cuántos cuadrados, como mínimo, hacen falta para recubrirlo totalmente con cuadrados idénticos?
- Ejercicio 7.** Tres lámparas intermitentes se encienden a intervalos de 18, 21 y 28 segundos, respectivamente. Si todas se encienden juntas al comenzar, ¿cuántas veces más se encienden juntas en una hora?
- Ejercicio 8.** ¿Cuáles enteros positivos menores que 30 son primos relativos con 30?
- Ejercicio 9.** Determina si los enteros en cada uno los siguientes conjuntos son primos relativos por pares a) {17, 18, 19, 23} b) {14, 17, 21, 85}.
- Ejercicio 10.** Usa el algoritmo de Euclides para encontrar el máximo común divisor de 136 y 78.
- Ejercicio 11.** Usa el algoritmo de Euclides para encontrar los valores de x, y tales que $24x + 104y = 8$.
- Ejercicio 12.** Si n es un entero positivo, determina $\text{mcd}(n, n+1)$ y $\text{mcm}(n, n+1)$.
- Ejercicio 13.** La maestra distribuyó la misma cantidad de dulces entre cada uno de 5 niños y se quedó tres para ella misma. No se acuerda cuántos dulces tenía, pero sí que era un múltiplo de 6 entre 65 y 100. ¿Cuántos dulces tenía?
- Ejercicio 14.** Halla todos los enteros positivos a y b tales que
 $\text{mcd}(a,b) = 10$ y $\text{mcm}(a,b) = 100$.
- Ejercicio 15.** Para una excursión al campo los alumnos forman grupos. Notan que si forman grupos de 5, sobran dos alumnos; si los grupos son de 4, sobra uno y si los grupos son de 7, sobran cuatro. ¿Cuál es la menor cantidad de alumnos que puede haber?

1.3 Congruencias

Antes de escribir la definición de dos números congruentes, analicemos un ejemplo.

Ejemplo 1: Aquiles tiene tarjetas numeradas del 1 al 2011 que introduce en cinco cajas señaladas 1, 2, 3, 4 y 5. La primera la coloca en la caja 1, la segunda en la 2 y así sucesivamente, hasta que la sexta tarjeta la coloca en la caja 1 y sigue con las demás tarjetas distribuyéndolas como en la siguiente tabla.

Caja 5	5	10	15	20	25	...			
Caja 4	4	9	14	19	24	...			
Caja 3	3	8	13	18	23	...			
Caja 2	2	7	12	17	22	...			
Caja 1	1	6	11	16	21	...			

¿En qué caja coloca la tarjeta número 96?

Nota que en la caja 1, están las tarjetas 1, 6, 11, 16, etc. en la caja 2, las tarjetas 2, 7, 12, 17, etc. en la caja 3 colocamos las tarjetas 3, 8, 13, 18, etc. ¿Qué puedes deducir?

Estas cajas representan cinco clases disjuntas, es decir, que no tienen ningún elemento en común. Podemos ubicar cualquier tarjeta que tiene Aquiles en sólo una de ellas, observando que:

No. de Caja	Característica de sus tarjetas	Forma
Caja 1:	Las que exceden en una unidad a un múltiplo de 5	$5k+1$
Caja 2:	Las que exceden en dos unidades a un múltiplo de 5	$5k+2$
Caja 3:	Las que exceden en tres unidades a un múltiplo de 5	$5k+3$
Caja 4:	Las que exceden en cuatro unidades a un múltiplo de 5	$5k+4$
Caja 5:	Múltiplos de 5	$5k$.

Después de este análisis, sabemos que la tarjeta número 96 se encuentra en la caja 1, puesto que $96 = 5(19) + 1$.

Fíjate que las tarjetas de la caja 5 tienen un número que al dividirse entre 5 dejan residuo cero; las de la caja 1 son aquellas que al dividirse entre 5 dejan residuo 1, y así sucesivamente. Si consideramos al conjunto de los enteros con este criterio, éste se divide en cinco clases:

$$C_0 = \{\dots, -15, -10, -5, 0, 5, 10, 15, \dots\}$$

$$C_1 = \{\dots, -14, -9, -4, 1, 6, 11, 16, \dots\}$$

$$C_2 = \{\dots, -13, -8, -3, 2, 7, 12, 17, \dots\}$$

$$C_3 = \{\dots, -12, -7, -2, 3, 8, 13, 18, \dots\}$$

$$C_4 = \{\dots, -11, -6, -1, 4, 9, 14, 19, \dots\}.$$

La característica de cualquiera de los elementos de la clase C_r es que al dividirse entre cinco, deja residuo r . C_r se denomina clase módulo r .

Si dos enteros pertenecen a la misma clase, diremos que ellos son congruentes módulo r .

Ahora estamos listos para la definición.

Definición *Congruencia*

Decimos que los enteros a y b son congruentes módulo m , $m > 0$, si al dividirse entre m dejan el mismo residuo, y lo denotaremos como:

$$a \equiv b \pmod{m}$$

Ejemplo 2:

- $25 \equiv 5 \pmod{5}$ pues ambos pertenecen a C_0 .
- $-13 \equiv 12 \pmod{5}$ pues ambos pertenecen a C_2 .
- $23 \equiv 8 \pmod{3}$ pues al dividirse entre 3, dejan residuo 2.
- $143 \equiv 443 \pmod{100}$.

Ejemplo 3: Un ejemplo que usamos todos los días es la aritmética del reloj. Si son las 7:00 am, ¿qué hora marcará el reloj dentro de 25 horas?

Como $25 \equiv 1 \pmod{12}$, sólo sumamos 1 a 7:

$$7 + 25 \equiv 7 + 1 \equiv 8 \pmod{12}.$$

Dentro de 25 horas serán las 8:00 am y este cálculo lo hacemos sin saber que usamos módulo 12. Con $m = 12$, hay sólo 12 números 1, 2, 3,..., 10, 11, 12, 1, 2,...; empezando de nuevo después de 12. Los números 1, 2,..., 12 representan las clases módulo 12. Cada entero es congruente con uno de los números 1, 2,..., 12, de la misma forma que las horas del reloj siempre muestran 1, 2,..., 12. Estas clases están dadas, para n entero por:

$$12n + 1, 12n + 2, 12n + 3, \dots, 12n + 11, 12n.$$

Presentamos las siguientes propiedades sobre congruencias:

Propiedades

Sean a, b, c enteros y m entero positivo:

1. $a \equiv b \pmod{m}$ si y sólo si $m \mid (b-a)$.
2. $a \equiv a \pmod{m}$
3. Si $a \equiv b \pmod{m}$ entonces $b \equiv a \pmod{m}$
4. Si $a \equiv b \pmod{m}$ y $b \equiv c \pmod{m}$ entonces $a \equiv c \pmod{m}$.
5. Si $a \equiv b \pmod{m}$ entonces:
 - a. $a+x \equiv b+x \pmod{m}$ para todo entero x
 - b. $ax \equiv bx \pmod{m}$ para todo entero x .
6. Si $a \equiv b \pmod{m}$ y $c \equiv d \pmod{m}$, entonces:
 - a. $a+c \equiv b+d \pmod{m}$
 - b. $a-c \equiv b-d \pmod{m}$
 - c. $ac \equiv bd \pmod{m}$
 - d. $a^n \equiv b^n \pmod{m}$ para todo entero positivo n .

Las congruencias se comportan de cierta manera como igualdades. Esta semejanza queda ilustrada en las propiedades 5 y 6.

Ejemplo 4:

- $9 \equiv 4 \pmod{5}$ y $7 \equiv 2 \pmod{5}$ luego, por la propiedad 3.2,
 $9+7 \equiv 4+2 \pmod{5}$ y $9 \times 7 \equiv 4 \times 2 \pmod{5}$.
- Al calcular $414 \times 463 \pmod{413}$ se obtiene $1 \times 50 \equiv 50 \pmod{413}$.

Ejemplo 5: Si deseamos encontrar las dos últimas cifras de 7^{2015} usamos mod 100 y la propiedad anterior. Escribamos algunas de las potencias de 7 mod 100: 1, 7, 49, 43, 1, 7, 49, 43, ... Vemos que tenemos un patrón.

Como $7^4 = 2401 \equiv 1 \pmod{100}$, para todo entero positivo k , $7^{4k} = (7^4)^k \equiv (1)^k \pmod{100}$.

En particular podemos escribir $7^{2012} = 7^{4 \cdot 503} \equiv 1^{503} \equiv 1 \pmod{100}$. Por la propiedad 3.2d, $7^{2015} \equiv 7^{2012} \cdot 7^3 \equiv 1 \cdot 7^3 \equiv 43 \pmod{100}$, lo que significa que 7^{2015} tiene como residuo 43 al dividirlo por 100. Así encontramos las cifras de las decenas y las unidades.

A continuación enunciaremos un importante resultado de la Teoría de Números, conocido como el pequeño teorema de Fermat.

Teorema de Fermat

Si p es primo y a entero, entonces $a^p \equiv a \pmod{p}$.

Ejemplo 6: Toma $a = 2$ y $p = 7$, el teorema predice que 7 es un divisor de $2^7 - 2$, es decir, de 126. Lo cual es cierto.

¿Puedes encontrar más ejemplos?

Ejercicios

Para que practiques lo expuestos anteriormente, te proponemos unos pocos ejercicios:

Ejercicio 1. Encuentra con quiénes son congruentes los siguientes números:

mod 5: -3, -6, -2, -1

mod 8: 17, -9, -3, -4

mod 9: 11, -4, -7, -5

mod 13: 20, -1, -2, -3

Ejercicio 2. Encuentra el residuo de $37^4 - 49 \times 801 + 130$ al dividirlo por 5.

Ejercicio 3. Encuentra el último dígito de 3^{400} .

Ejercicio 4. Hacer la tabla de adición y la tabla de multiplicación mod 3.

- Ejercicio 5.** Encuentra el residuo de dividir $12233 \times 455679 + 87653^3$ por 4.
- Ejercicio 6.** Determina para qué enteros positivos n , $2^n - 1$ es divisible por 7. [Ayuda: estudia los casos $n = 3k$, $n = 3k + 1$, $n = 3k + 2$.]
- Ejercicio 7.** Demuestra que si 7 no es un divisor de n , entonces $n^6 \equiv 2010 \pmod{7}$.
- Ejercicio 8.** Calcula $3^{1000} \pmod{7}$.
- Ejercicio 9.** Demuestra que $2^{70} + 3^{70}$ es divisible por 13.
- Ejercicio 10.** Encuentra el residuo que resulta al dividir $2^{1000006}$ entre 101.

2

PARIDAD

2.1 Paridad

Los conceptos que involucran la paridad son muy útiles al resolver problemas de olimpiadas.

Resultados importantes:

Propiedades

- Un número par puede representarse de la forma $2n$ con n entero.
- Un número impar puede representarse de la forma $2n \pm 1$ con n entero.
- La suma (o diferencia) de dos números pares es par.
- La suma (o diferencia) de dos números impares es par.
- El producto de varios números donde al menos uno de ellos es par, es par.
- Dos números tienen la misma paridad si ambos son pares o ambos impares.

Ejemplo 1: Si efectúas el producto de todos los números impares comprendidos entre 1 y 2012, ¿cuál es el dígito de las unidades del producto?

Solución: Como 5 es uno de los números impares incluidos en la multiplicación, el producto es un múltiplo de 5; además el producto de números impares es impar. Luego, el dígito de las unidades del producto de todos ellos es 5.

Ejemplo 2: Se tiene escrito sobre un pizarrón once números 1. Se toma dos números y se suma 1 a ambos, o se resta 1 a ambos, o se suma 1 a uno de los números y se resta 1 al otro. ¿Es posible mediante estas operaciones tener escritos en el pizarrón once números 10?

Solución: Al sumar a ambos números 1, la suma total de los números aumenta en 2; al restar 1 a ambos números, la suma total disminuye en 2; y al sumarle 1 a un número y restarle 1 al otro, la suma total no se ve afectada.

Como consecuencia, si se da un conjunto de números inicialmente, al efectuar repetidamente este tipo de operaciones, la paridad de la suma total no cambia. Pues las operaciones lo único que hacen es sumar +2, -2 ó 0 a la suma total.

Al principio la suma es 11 y al final queremos que sea 110. Como vemos, estos números no tienen la misma paridad y por tanto no se puede llegar a tener once números 10.

Ejemplo 3: ¿Podemos llenar un cuadrado mágico con los 36 primeros números primos?

Solución: Este sería un cuadrado 6×6 , con igual suma en filas, columnas y diagonales. Como el 2 es el primer número primo y es par, la suma de los números de la fila donde éste se coloque será impar pues es la suma de cinco impares y un par. La suma en las otras filas será par pues es la suma de seis impares. Por lo que la suma no puede ser igual en todas las filas.

Como puedes ver, la paridad se utiliza comúnmente para probar que cierta actividad no se puede realizar.

Ejercicios

He aquí unos ejercicios en los que podrás aplicar el concepto de paridad para resolverlos:

Ejercicio 1. La suma de seis números es par, el producto de los cuatro primeros en impar y el último es par. ¿El quinto número es par o impar?

Ejercicio 2. Si x es un número par y y un número impar, ¿cuál de los siguientes números no es impar? a) $x+y$ b) $x+x+1$ c) $xy+1$ d) $(y+y)/2$ e) $x^2/2$

Ejercicio 3. Halla el residuo de la división por 2 del número $3^{2011} + 6^{2011} + 9^{2011} + \dots + 5979^{2011}$.

Ejercicio 4. Sean m y n números naturales. Determina la paridad de $m^n + (n-1)^m$ de acuerdo con la paridad de los números dados.

Ejercicio 5. Un nadador para entrenar realiza sesiones de 3, 5 y 7 km. Su entrenador le recomienda entrenar un total de 35 km. ¿Podrá realizarlo en 10 sesiones?

Ejercicio 6. A un libro de 100 páginas numeradas del 1 al 200 se le desprendieron 25 hojas. Los números de las páginas desprendidas se suman, ¿puede esta suma ser igual a 1024?

Ejercicio 7. En una conferencia internacional se reunieron quince delegados de Asia, África, América y Europa, cada continente mandó un número diferente de delegados, y cada uno está representado, por lo menos, por un delegado. América y Asia enviaron un total de seis delegados. Asia y Europa enviaron un total de siete delegados.

a) ¿Qué continente envió cuatro delegados?

b) ¿Cómo pudieran estar compuestas las delegaciones?

Ejercicio 8. Los números del 1 al 20 se escriben en fila. Dos jugadores toman turnos para poner signos $+$ ó $-$ entre los números. Cuando se han puesto todos los signos, se realizan las operaciones. El primer jugador gana si la suma es par, el segundo, si la suma es impar. ¿Quién gana y por qué?

Ejercicio 9. Un cambio consiste en tomar un número del siguiente cuadro y sumarle o restarle un múltiplo par de alguno de sus vecinos. ¿Es posible que después de varios cambios sucesivos el tablero se transforme de tal forma que aparezcan los números del 1 al 25?

2	1	2	1	2
1	2	1	2	1
2	1	2	1	2
1	2	1	2	1
2	1	2	1	2

Ejercicio 10. Sean a , b , c , d cuatro números enteros, ¿es posible que al tomar dos de ellos y sumarlos resulte 2, 4, 9, 9, 14, 16?

3

TEMAS DE ÁLGEBRA

3.1 Exponentes

Definición Exponentes

Por definición la notación a^n con n entero positivo y a número real, significa el producto de a por sí mismo n veces. Esta definición se puede extender para valores racionales de n :

- Para todos los enteros m y enteros positivos n para los cuales $a^{1/n}$ existe,

$$a^{m/n} = \left(a^{1/n}\right)^m.$$

Algunos de problemas que involucran exponentes pueden parecer algo complicados pero es posible convertirlos a una expresión sencilla usando las propiedades que detallamos a continuación.

Propiedades

- Sean x e y números racionales. Los siguientes resultados son válidos para todos los números reales a y b para los cuales la potencia indicada exista y no se tengan denominadores cero.

$$a^0 = 1 \qquad a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y} \qquad (a^x)^y = a^{xy}$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$$

$$(ab)^x = a^x b^x$$

Equivalentemente, usando la notación de radicales:

- Para todos los números reales a y b y enteros positivos m y n para los cuales la raíz indicada exista:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n} \qquad \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a} \qquad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

Al trabajar con exponentes y radicales debes tomar en cuenta las siguientes situaciones especiales.

- Si $a = 0$ y $n \neq 0$ definimos $a^n = 0$. Sin embargo, cuando a y n son ambos cero, diremos que a^n no está definida.
- Si $a < 0$, no siempre a^n es un número real. Si n es un número entero, a^n es siempre un número real. Pero para n racional no entero, a^n será un número real dependiendo del valor del denominador de n . De manera más clara, si $n = p/q$ con p y q enteros no nulos sin factores comunes o sea, primos relativos, entonces,

$$a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p} = \left(\sqrt[q]{a}\right)^p, \text{ está definida si } q \text{ es impar.}$$

Pero si q es par, $a^{p/q}$ no está definida.

Ejemplo: $(-8)^{2/3} = (\sqrt[3]{-8})^2 = (-2)^2 = 4$, pero $(-8)^{3/2}$ no se considera como número real pues la raíz cuadrada de un número negativo no está definida.

Debes tener cuidado con la notación

$$a^{b^c} = a^{(b)^c}.$$

Mira el siguiente ejemplo:

$$2^{3^4} = 2^{(3)^4} = 2^{81},$$

lo que es diferente a $(2^3)^4 = 2^{3 \times 4} = 2^{12}$.

Ejemplo 1: Al resolver $\sqrt{\frac{\sqrt[4]{4 \cdot \sqrt{4^2}}}{2^3}}$ se obtiene $1/2$.

Ejemplo 2: Si $a^n = 3$, efectuando las operaciones en $\frac{(a^n)^2 + (a^3)^n + a^{4n}}{(a \cdot 3^{1/n})^n}$ resulta 13.

Ejemplo 3: Si a y b son números reales positivos tales que $a^b = b^a$ y $b = 4a$ encuentra el valor de a .

Solución: Por las condiciones dadas se tiene,

$$a^{4a} = (4a)^a.$$

Y utilizando las propiedades de los exponentes resulta,

$$(a^3)^a = 4^a \text{ de donde se deduce } a^3 = 4 \text{ y por lo tanto } a = \sqrt[3]{4}.$$

3.2 Valor absoluto

Definición Valor absoluto

El **valor absoluto** de a , denotado $|a|$, está definido por:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0. \end{cases}$$

Observa que para todo número real a se tiene que:

$$\sqrt{a^2} = |a|.$$

Ejemplos: $\sqrt{(7)^2} = |7| = 7$ y $\sqrt{(-4)^2} = |-4| = 4$.

3.3 Identidades Algebraicas

Una ecuación se llama identidad si es verdadera para cualquier valor de las variables. Las siguientes identidades son muy útiles al resolver problemas de olimpiadas.

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

$$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$$

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$$

$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2).$$

Ejemplo: Si $a \times b = 3$ y $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = 5$, entonces el valor de $a^2 + b^2$ es:

a) 231 b) 219 c) 225 d) 163 e) 196

Solución: Sumando, $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{ab} = 5$ luego, $b - a = 15$. Por otro lado,

$(b - a)^2 = 15^2 = 225 = b^2 + a^2 - 2ab = b^2 + a^2 - 6$. Despejando se obtiene que la respuesta correcta es a) 231.

3.4 Ecuación Lineal y Cuadrática

Definición Ecuación Lineal

Una **ecuación lineal** o de primer grado, de una variable o incógnita, es una ecuación que se puede escribir de la forma $ax + b = 0$ con $a \neq 0$.

La solución de la ecuación lineal es el valor de la incógnita que hace verdadera la igualdad. La estrategia básica para resolver una ecuación lineal, es despejar la incógnita y el valor que muestre el otro lado de la igualdad, será la solución.

Definición Ecuación Cuadrática

La **ecuación cuadrática** o de segundo grado de una variable, de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ con $a, b, y c$ números reales y $a \neq 0$, tiene dos soluciones que están dadas por

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ y } x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Definición Discriminante

La expresión que se encuentra dentro de la raíz, $b^2 - 4ac$, se denomina **discriminante** de la ecuación cuadrática. Si el discriminante es cero, las soluciones son números reales e iguales. Si el discriminante es positivo, las soluciones son números reales, pero si es negativo, diremos que la ecuación cuadrática no posee solución (en el conjunto de los números reales).

Las ecuaciones cuadráticas algunas veces pueden resolverse usando la factorización. En particular, observa que si $x^2 + bx + c = (x - p)(x - q)$ entonces se tiene que $b = -(p + q)$ y $c = pq$.

Ejemplo: Para factorizar $x^2 + 3x - 10$ buscarás dos números que sumados den -3 y multiplicados den -10 . Luego $x = -5$ y $x = 2$ son las soluciones de la ecuación $x^2 + 3x - 10 = 0$.

3.5 Sistema de Ecuaciones Lineales

A menudo en las olimpiadas, se presentan problemas que involucran sistemas de ecuaciones lineales que debes resolver. Resolver un sistema de ecuaciones es hallar el conjunto de valores que satisfacen todas las ecuaciones simultáneamente.

Hay varios métodos para resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, podemos mencionar, igualación, eliminación, sustitución, el método gráfico y la regla de Cramer. Resumiremos algunos de los métodos que has estudiado en tu curso de Álgebra:

- En el **método de igualación**, despejamos la misma incógnita en ambas ecuaciones y las expresiones despejadas se igualan. Resolvemos para la incógnita que aparece en ellas y sustituimos en cualquiera de las ecuaciones despejadas para encontrar el valor de la otra.
- En el **método de eliminación**, se multiplica una o ambas ecuaciones por números que permitan eliminar una variable al sumarlas. El resultado es una ecuación en una variable cuya solución se sustituye en alguna de las ecuaciones originales para encontrar el valor de la otra.
- En el **método de sustitución**, se despeja una incógnita en una ecuación y este resultado se sustituye en la otra ecuación. Esta última se resuelve para encontrar el valor de la incógnita y se sustituye en la ecuación que se despejó para encontrar el valor de la otra.

Ejemplo: Sean m y n dos números tales que $(2^m)(4^n) = \sqrt{2}$ y $m + 3n = 2$. Entonces $m \times n$ es igual a: a) $\frac{-15}{4}$ b) $\frac{55}{4}$ c) $\frac{7}{4}$ d) $\frac{-21}{4}$ e) $\frac{21}{4}$

Solución: Como $2^m 4^n = 2^m (2^2)^n = 2^{m+2n}$ y $\sqrt{2} = 2^{1/2}$, igualando los exponentes y utilizando la ecuación dada, obtenemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} m + 3n = 2 \\ m + 2n = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

La solución de este sistema es $m = -\frac{5}{2}$, $n = \frac{3}{2}$, por tanto $m \times n = -\frac{15}{4}$.

Ejercicios

Hemos reunido unos cuantos problemas que te ayudarán a afianzar los conceptos y los métodos.

Ejercicio 1. Para obtener 8^2 debemos elevar 2^2 a la potencia:

- a) 2 b) 3 c) 4 d) 6 e) 8

Ejercicio 2. La expresión $4^4 \cdot 9^4 \cdot 4^9 \cdot 9^9$ se simplifica como:

- a) 13^{13} b) 13^{36} c) 36^{13} d) 36^{36} e) 1296^{26}

Ejercicio 3. ¿Cuánto vale x si $2(2^{2x}) = 4^x + 64$?

Ejercicio 4. Juan y Aquiles conversaban acerca de su colección de carritos miniatura. Juan le dijo: “si me das cierta cantidad de carritos tendría 6 veces lo que te queda. Pero si yo te doy esa misma cantidad, tú tendrías una tercera parte de lo que me quedaría”. ¿Cuál es la cantidad mínima de carritos que tiene Juan?

Ejercicio 5. Tres hermanos conversan acerca de sus edades. El mayor dice: “la suma de nuestras edades dividida por la edad de nuestro hermano menor da 4 como resultado”. El otro hermano dice la suma de los cuadrados de las tres edades es igual a 200”. El más pequeño dice: “mamá me dijo que tú naciste cuando él tenía dos años”. ¿Cuántos años tiene cada hermano?

Ejercicio 6. Una pareja de mellizos y un conjunto de trillizos tienen por edades números enteros, 150 en total. Si las edades de los mellizos se intercambian con la de los trillizos, en total sería 120. ¿Cuántos años tienen los mellizos?

Ejercicio 7. ¿Para cuántos valores enteros de n , entre 0 y 50, la expresión $x^2 + x - n$ se factoriza como producto de factores lineales a coeficientes enteros?
a) 7 b) 5 c) 3 d) 1 e) 8

Ejercicio 8. La suma de los cuadrados de cuatro números impares consecutivos es 1044. El producto de los dos números del medio es:



Ejercicio 17. ¿Para qué valores de n , $2^8 + 2^{11} + 2^n$ es un cuadrado perfecto?

Ejercicio 18. ¿Para qué valores de k la ecuación $kx^2 + 2x + 1 - \frac{1}{k} = 0$ tiene raíces iguales?

Ejercicio 19. Encuentra las soluciones enteras del siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}x + y + z &= 2 \\x^2 - y^2 - z^2 &= 2 \\x - 3y^2 + z &= 0\end{aligned}$$

Ejercicio 20. En este cuadrado mágico la suma de los tres números en cada fila, columna y diagonal resulta la misma cantidad. Entonces el valor de x es:

		x
$\sqrt[3]{4\sqrt{3^3}}$	$\sqrt[4]{5\sqrt{3^5}}$	
		$2(9)^{\frac{1}{8}}$

- a) 0 b) $\sqrt[3]{3}$ c) $\sqrt[4]{3}$ d) $\sqrt[5]{3}$ e) 1

3.6 Progresión Aritmética y Geométrica

Definición Progresión Aritmética

Una **progresión aritmética** es una sucesión de números donde la diferencia entre los términos consecutivos es constante. Así:

$$a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, a_1 + 3d, \dots$$

El término n -ésimo de la progresión tiene la forma: $a_n = a_1 + d(n-1)$.

La suma de los n primeros términos de la progresión aritmética está dada por la fórmula:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}.$$

Ejemplo: Para la progresión 2, 7, 12, 17, 22, ... se tiene que

$$a_6 = 2 + 5(5) = 27 \quad \text{y} \quad S_6 = \frac{(2+27)(6)}{2} = 87.$$

Propiedades

- En una progresión aritmética, cada término después del primero es el promedio, o lo que es lo mismo, la media aritmética de los términos vecinos.
- Si x, y, z están en progresión aritmética entonces $y - x = z - y$.

Definición *Progresión Geométrica*

Una **progresión geométrica** es una sucesión de números donde la razón entre los términos consecutivos es constante. Así:

$$a_1, a_1r, a_1r^2, a_1r^3, \dots$$

El término n -ésimo de la progresión tiene la forma: $a_n = a_1r^{n-1}$.

La suma de los n primeros términos de la progresión geométrica está dada por la fórmula:

$$S_n = a_1 \frac{(r^n - 1)}{r - 1}.$$

Ejemplo: Para la progresión $1, 10, 10^2, 10^3, \dots$ se tiene que

$$a_4 = 10^3 \quad \text{y} \quad S_4 = \frac{10^4 - 1}{10 - 1} = \frac{9999}{9} = 1111.$$

Propiedades

- En una progresión geométrica, cada término después del primero es la raíz cuadrada del producto de los términos vecinos. Es la media geométrica de los términos vecinos.
- Si x, y, z están en progresión geométrica entonces, $y/x = z/y$.
- Si $-1 < r < 1$, r^n es muy pequeño cuando n toma valores muy grandes. Por lo que, en este caso, $S_n = a_1 \left(\frac{1}{1-r} \right)$.

Ejercicios

A continuación te proponemos algunos ejercicios sobre el tema:

Ejercicio 1. Encuentra el 5^{to} , 10^{mo} y n -ésimo término, la diferencia o la razón en cada una de las siguientes progresiones:

$$3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \dots ; \quad 2, 2^2, 2^3, 2^4, \dots ; \quad 1, -2, 4, -8, \dots ; \quad 1, -1, 1, -1, \dots ; \quad 2, 5, 8, 11, \dots$$

Ejercicio 2. Halla

a) a_{11} si $a_1 = 2 + \sqrt{2}$; $a_2 = 3$

b) S_n si $a_7 = 7/3$, $d = -2/3$, $n = 15$

c) el término 12^{do} de la progresión geométrica si los términos 2^{do} y 3^{ro} son 2 y $-\sqrt{2}$.

Ejercicio 3. Escribe cinco medias aritméticas entre 3 y -5 . Escribe dos medias geométricas entre 4 y 500 .

Ejercicio 4. a) Encuentra la suma de los números enteros entre 50 y 350 que terminan en 1 . b) Encuentra la suma de los números enteros del 1 al 30 .

- Ejercicio 5.** Aquiles leyó un libro, el primer día leyó 5 páginas y cada día siguiente leyó 2 páginas más que el anterior. Si terminó el libro en 20 días, ¿cuántas páginas tenía el libro?
- Ejercicio 6.** Escribe $0,227272727\dots$ como fracción.
- Ejercicio 7.** Un tercio del aire de un tanque se extrae al aplicar una bomba de vacío. ¿Qué parte de la cantidad original de aire del tanque queda después de la centésima aplicación?
- Ejercicio 8.** Sean $a_1, a_2, \dots$ y $b_1, b_2, \dots$ progresiones aritméticas tales que $a_1 = 25$, $b_1 = 75$ y $a_{100} + b_{100} = 100$. Encuentra la suma de los primeros 100 términos de $a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots$
- Ejercicio 9.** Ana reparte caramelos a sus amigas. A la primera le da uno, a la segunda dos, a la tercera le da el doble de caramelos que le dio a la segunda y así sucesivamente. Si Ana tiene 2011 dulces, ¿cuál es la mínima cantidad de dulces que le faltan para poder repartirlos de esta manera?
- Ejercicio 10.** Encuentra las medidas de los lados de un triángulo rectángulo sabiendo que las mismas están en progresión aritmética de diferencia 3.

3.7 Polinomios

Una expresión algebraica es una constante, una variable o cualquier combinación de constantes y variables por adición, sustracción, multiplicación, división o radicación.

Ejemplos:

$$x^2 - 5x + 2, \quad \frac{x^2 - y^2}{5xy}, \quad y, \quad \sqrt{2 - x}$$

son expresiones algebraicas.

Definición Polinomio

Una expresión algebraica de la forma:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

se denomina polinomio. Cada uno de los $a_i x^i$ se denomina término, los números reales $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ son los coeficientes, x se le llama indeterminada y el mayor exponente al que está elevada la indeterminada se llama grado del polinomio.

Ejemplo 1: $x^3 - 4x^2 + 2x - 3$ es un polinomio de grado 3 con coeficientes 1, -4, 2 y -3.

Repasa las operaciones con polinomios: adición, sustracción, multiplicación y división. Para resolver problemas de olimpiadas, es muy útil conocer factorización y división sintética.

Algoritmo de la división para polinomios:

Sean $f(x)$ y $g(x)$ polinomios. Entonces,

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x)$$

donde $q(x)$, $r(x)$ son polinomios y el grado de $r(x)$ es menor que el grado de $g(x)$. El polinomio $q(x)$ se denomina cociente y $r(x)$ se denomina residuo.

Ejemplo 2: Si se hace la división de $x^3 + 4x$ entre $x + 1$, se obtiene $x^3 + 4x = (x^2 - x + 5)(x + 1) - 5$ donde $x^2 - x + 5$ es el cociente y -5 es el residuo.

Definición Raíz de un polinomio

a es raíz de un polinomio $p(x)$, si $p(a) = 0$.

Teorema de Residuo

Si el polinomio $p(x)$ se divide por $x - a$ el residuo es $p(a)$.

Teorema del Factor

Si a es una raíz del polinomio $p(x)$, entonces $x - a$ es un factor.

Ejemplo 3: Si $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = P(x + 2)(x - 3)$, donde P es un polinomio. Entonces P es igual a: a) $x - 4$ b) $x + 4$ c) $x + 3$ d) $x + 2$ e) $x - 2$

Solución: Si $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = P(x + 2)(x - 3)$ donde P es un polinomio, entonces P debe ser de la forma $P = (x + a)$. Luego las raíces del polinomio dado serían -2 , 3 y $-a$ y satisfacen la condición, $2 \cdot -3 \cdot a = 12$. Por tanto $a = -2$.

Ejemplo 4: Si el residuo de dividir el polinomio $p(x) = ax^5 + bx^3 + cx - 8$ entre $x + 3$ es 6, determina el residuo de dividir $p(x)$ entre $x - 3$.

Solución: De acuerdo con el teorema del residuo, si al dividir $p(x)$ entre $(x + 3)$ el residuo es 6, entonces, $p(-3) = 6$. Es decir,

$$p(-3) = a(-3)^5 + b(-3)^3 + c(-3) - 8 = 6.$$

De donde,

$$-a(3)^5 - b(3)^3 - c(3) = 14.$$

Luego,

$$p(3) = a(3)^5 + b(3)^3 + c(3) - 8 = -14 - 8 = -22.$$

El residuo de dividir $p(x)$ entre $x - 3$ es -22 .

Ejercicios

Te invitamos a resolver unos pocos ejercicios relativos a polinomios.

Ejercicio 1. Dado que $p(x) = x^3 + ax + 1$ y que $p(1) = 1$, ¿Cuánto vale $p(2)$?

Ejercicio 2. El polinomio $p(x) = x^2 - 3x - 5$ tiene como raíces a α y β encuentra $\alpha^2 + \beta^2$.

Ejercicio 3. Determina el menor número entero positivo x para que $\frac{5x+23}{x-7}$ sea un número entero ($x \neq 7$).

Ejercicio 4. Hallar el residuo que resulta cuando $p(x) = (x+3)^5 + (x+2)^8 + (5x+9)^{2012}$ se divide por $x+2$.

Ejercicio 5. Encuentra el valor de k para que el resto de la división del polinomio $p(x) = 5x^4 + x^2 - kx - 4$ entre $(x - 2)$ sea -3 .

Ejercicio 6. Al dividir un polinomio por $x-1$ se obtiene como residuo 2 y al dividirlo por $x-2$ se obtiene como residuo 1. ¿Cuál es el residuo al dividirlo por $(x-1)(x-2)$?

Ejercicio 7. Sean a, b y c raíces del polinomio $p(x) = x^3 - 6x^2 + 5x - 1$, calcula el valor de $a^3 + b^3 + c^3$.

Ejercicio 8. Usa el teorema del factor y el teorema del residuo para factorizar el polinomio $p(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$.

Ejercicio 9. Si $p(x) = x^2 - 5x + 6$ es factor del polinomio de tercer grado $q(x) = 3x^3 + ax^2 + bx + 12$, encuentra los valores de a y b .

Ejercicio 10. El polinomio $p(x) = x^2 + ax + a$ es un factor de $q(x) = x^3 - 2x - 4$. El valor de $p(0)$ es:

- a) 2 b) -2 c) 1 d) 4 e) -4

4

ÁNGULOS Y TRIÁNGULOS

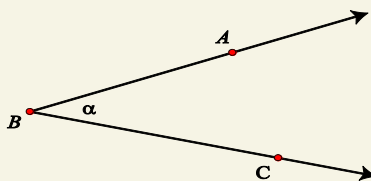
En esta sección asumiremos que conoces conceptos y axiomas básicos de la geometría plana. Los triángulos son polígonos y deberíamos incluirlos dentro de la siguiente sección, pero le dedicamos una aparte por la cantidad de resultados que se estudian. Se aconseja que, si lo necesitas, busques las definiciones en la siguiente sección.

4.1 Ángulos

Definición *Ángulo*

Entenderemos por ángulo a la región del plano comprendida entre dos semirrectas con el mismo punto de origen.

Las semirrectas se llaman lados del ángulo y el punto común vértice. El ángulo de la figura lo denotaremos $\angle ABC$. Su vértice es B y su medida es α .



Se utiliza tanto el *grado* como el *radián* para medir ángulos. Recuerda que se verifica la identidad

$$\frac{A}{180} = \frac{r}{\pi}$$

donde A es la medida del ángulo en grados ($^{\circ}$) y r es la medida del ángulo en radianes (rad).

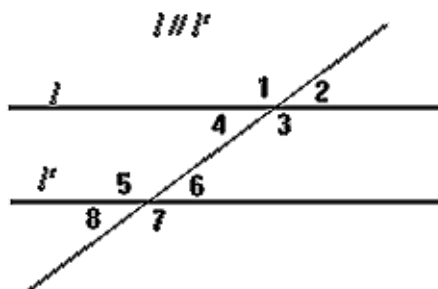
Sea α la medida de un ángulo. Diremos que el ángulo es:

agudo	si y sólo si	$0^{\circ} < \alpha < 90^{\circ}$,
recto	si y sólo si	$\alpha = 90^{\circ}$,
obtuso	si y sólo si	$90^{\circ} < \alpha < 180^{\circ}$,
llano	si y sólo si	$\alpha = 180^{\circ}$.

Definiciones para un par de ángulos:

Ángulos adyacentes	Son dos ángulos que tienen un lado común y el mismo vértice.
Ángulos opuestos por el vértice	Son dos ángulos en que los lados de uno son semirrectas opuestas a los lados del otro.
Ángulos complementarios	Es un par de ángulos adyacentes cuyas medidas suman 90° .
Ángulos suplementarios	Es un par de ángulos adyacentes cuyas medidas suman 180° .

Considera ahora dos rectas paralelas l y l' en el plano. Supón que una recta, llamada transversal, corta a l y l' y observa los ocho ángulos que forma con las dos rectas paralelas:



$\angle 3$, $\angle 4$, $\angle 5$ y $\angle 6$ son ángulos interiores. $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 7$ y $\angle 8$ son ángulos exteriores.

Los ángulos en lados opuestos de la transversal se llaman alternos, por ejemplo $\angle 4$ y $\angle 7$.

Llamamos alternos internos a, por ejemplo, $\angle 3$ y $\angle 5$.

Llamamos alternos externos a, por ejemplo, $\angle 1$ y $\angle 7$.

Llamamos correspondientes a los ángulos que están en posiciones correspondientes respecto a la transversal, mencionamos a $\angle 1$ y $\angle 5$ como ángulos correspondientes.

Además tenemos que $m\angle 1 + m\angle 2 = 180^\circ$ por lo tanto, los ángulos son suplementarios.

Por ejemplo $\angle 1$ y $\angle 3$ son opuestos por el vértice. Los ángulos opuestos por el vértice tienen igual medida, es decir, son congruentes. Veamos el porqué,

$$m\angle 1 + m\angle 2 = 180^\circ \quad \text{y} \quad m\angle 3 + m\angle 2 = 180^\circ.$$

Restando las ecuaciones se obtiene $m\angle 1 = m\angle 3$.

Otro resultado básico establece que los ángulos correspondientes también son congruentes. Hay otras relaciones entre los ángulos de la figura, ¿puedes encontrarlas? Pruébalas.

4.2 Triángulos

Por un punto A pasan infinitas rectas. Dos puntos A y B determinan una recta. Dados tres puntos A , B y C , si están sobre una recta se llaman colineales. Si los tres puntos no son colineales, forman un triángulo con las rectas que éstos determinan.



Clasificación de los triángulos atendiendo a la medida de sus lados

Triángulo equilátero	Tres lados de igual medida
Triángulo isósceles	Dos lados de igual medida
Triángulo escaleno	Tres lados de medida desigual

Clasificación de los triángulos atendiendo a la medida de sus ángulos

Triángulo rectángulo	Tiene un ángulo recto
Triángulo obtusángulo	Tiene un ángulo obtuso
Triángulo acutángulo	Sus tres ángulos son agudos
Triángulo equiángulo	Sus tres ángulos tienen igual medida. El triángulo equilátero es a la vez equiángulo.

Propiedades

- La suma de la medida de los ángulos interiores de todo triángulo es 180° .
- La suma de la medida de los ángulos exteriores de todo triángulo es igual a 360° .
- El lado de mayor longitud es el opuesto al ángulo de mayor medida.
- En todo triángulo, la suma de las longitudes de dos cualesquiera de sus lados debe ser mayor que la longitud del tercer lado.

4.3 Congruencia de triángulos**Definición** *Congruencia de triángulos*

Dos triángulos son congruentes si existe una correspondencia entre sus vértices tal que los ángulos correspondientes son congruentes y los lados correspondientes son congruentes. A los lados (ángulos) correspondientes también se les llama lados (ángulos) homólogos.

Criterios de congruencia de triángulos

- Dos triángulos son congruentes si sus lados correspondientes son congruentes. A este criterio de congruencia de triángulos se le denomina **lado - lado - lado (LLL)**.
- Dos triángulos son congruentes si dos lados y el ángulo comprendido de uno de los triángulos son congruentes con dos lados y el ángulo comprendido del otro triángulo. A este criterio de congruencia se le conoce como **lado - ángulo - lado (LAL)**.
- Dos triángulos son congruentes si dos ángulos y el lado comprendido de uno de los triángulos son congruentes con dos ángulos y el lado comprendido del otro triángulo. A este criterio de congruencia se le denomina **ángulo - lado - ángulo (ALA)**.

4.4 Semejanza de triángulos**Definición** *Semejanza de triángulos*

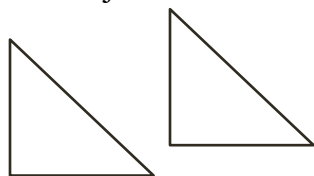
Dos triángulos son semejantes si existe una correspondencia entre sus vértices de tal manera que los ángulos correspondientes son congruentes y los lados homólogos son proporcionales.

Criterios de semejanza de triángulos

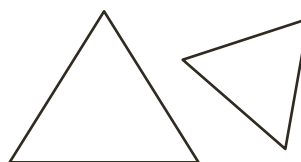
- (Criterio de semejanza AA) Dos triángulos son semejantes si dos ángulos del primer triángulo son congruentes con dos ángulos del segundo triángulo.
- (Criterio de semejanza LAL) Dos triángulos son semejantes si tienen dos lados correspondientes proporcionales y congruente el ángulo comprendido entre ellos.
- (Criterio de semejanza LLL) Los triángulos ABC y DEF son semejantes, si:

$$\frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF} = \frac{AB}{DE}.$$

Nota que dos triángulos congruentes tienen el mismo tamaño y la misma forma, mientras que dos triángulos semejantes tienen la misma forma pero no el mismo tamaño.



Congruentes



Semejantes

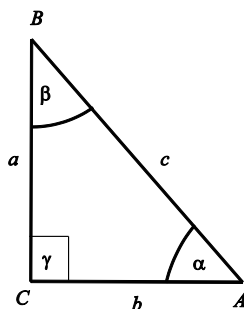
Definiciones

Segmentos y puntos notables en un triángulo

- Una **altura** es el segmento perpendicular trazado desde un vértice al lado opuesto o a la prolongación de dicho lado. Al punto de intersección del segmento con el lado opuesto, se llama pie de la altura. El punto donde concurren las tres alturas de un triángulo se llama **ortocentro**.
- La **mediatriz** de un lado del triángulo es el segmento perpendicular que pasa por su punto medio. A la intersección de las mediatrices de los lados de un triángulo se le llama **circuncentro**.
- Una **mediana** en un triángulo es el segmento que une un vértice con el punto medio del lado opuesto. El punto donde concurren las tres medianas de un triángulo se llama **baricentro, centro de gravedad o centroide** y divide a la mediana en razón 2:1 comenzando desde el vértice.
- La **bisectriz** de un ángulo en el triángulo es la semirrecta que lo divide en dos ángulos de igual medida. Las bisectrices en un triángulo se cortan en un punto llamado **incentro**.

4.5 Triángulos rectángulos y teoremas relacionados

Considere un triángulo rectángulo, al lado de mayor longitud se le llama hipotenusa y a los otros dos lados se le denomina catetos. En la figura, el lado $\overline{AB}$ es la hipotenusa del triángulo, los lados $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ son los catetos. Las letras en minúscula denotan la medida de los segmentos.



Teorema de Pitágoras

En todo triángulo rectángulo la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos es igual al cuadrado de la longitud de la hipotenusa. Con la notación de la figura anterior:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

El recíproco del teorema de Pitágoras también es verdadero. O sea, si en un triángulo, el cuadrado de la longitud de uno de sus lados es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los otros dos lados, el triángulo es rectángulo.

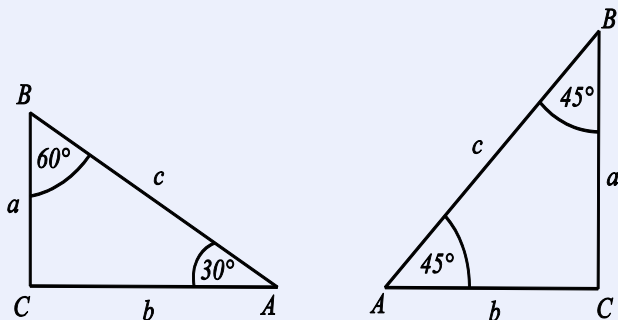
Teorema de los triángulos especiales

Si en un triángulo rectángulo uno de sus ángulos es de medida 30° , el otro ángulo no recto es de medida 60° , es un triángulo 30-60-90 y se tiene que:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \frac{a}{c} = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad \frac{b}{c} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Si en un triángulo rectángulo uno de sus ángulos es de medida 45° , el otro ángulo no recto es de medida 45° , es un triángulo 45-45-90 y se tiene que:

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{c} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{y} \quad \frac{a}{b} = 1.$$



Teorema de la altura en un triángulo rectángulo

En un triángulo rectángulo ABC , la altura trazada desde el ángulo recto C al lado $\overline{AB}$ cuya intersección llamamos D , es tal que se determinan tres triángulos rectángulos semejantes: ABC , ACD y CBD . Si nombramos las longitudes de los lados como en la figura 1. siguiente y recordando que $AB = c$, se da que:

$$\frac{a}{b} = \frac{f}{e} = \frac{d}{f}, \quad \frac{a}{c} = \frac{f}{b} = \frac{d}{a}, \quad \text{y} \quad \frac{b}{c} = \frac{e}{b} = \frac{f}{a}.$$

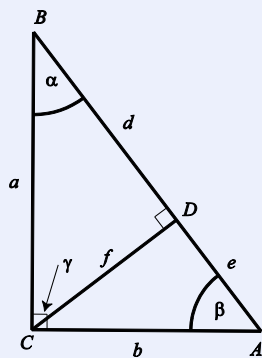


Figura 1.

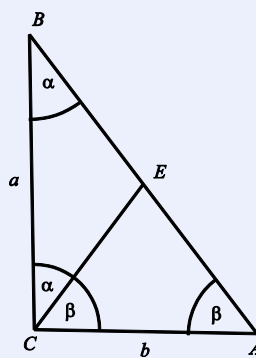


Figura 2.

Teorema de la mediana en un triángulo rectángulo

En un triángulo rectángulo ABC , construya el punto E en el segmento $\overline{AB}$ de tal manera que $m\angle ACE = \beta$. Ver figura 2. Entonces, $m\angle ECB = \alpha$ y los triángulos AEC y BCE son ambos isósceles, lo que implica que: $AE = CE = BE$.

4.6 Perímetro y Área de un Triángulo

Perímetro de un triángulo

El perímetro P de un triángulo es la suma de las longitudes de todos sus lados. De la figura:

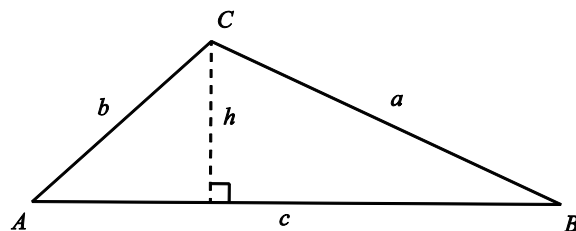
$$P = a + b + c.$$

Área de un triángulo

Si c denota la longitud de la base de un triángulo y la longitud de la altura correspondiente a la base es h , el área del triángulo es:

$$[ABC] = \frac{1}{2}ch$$

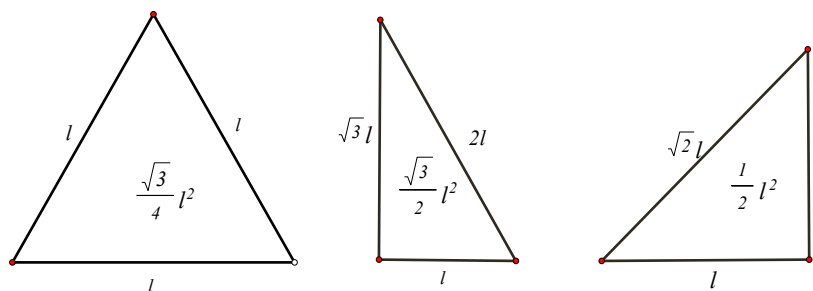
en donde el símbolo $[ABC]$ denota el área del triángulo ABC .



Cualquier lado puede ser usado como base de un triángulo y la altura correspondiente es la longitud del segmento perpendicular a la base desde el vértice opuesto. Es decir,

$$[ABC] = \frac{1}{2} ah_a = \frac{1}{2} bh_b = \frac{1}{2} ch_c$$

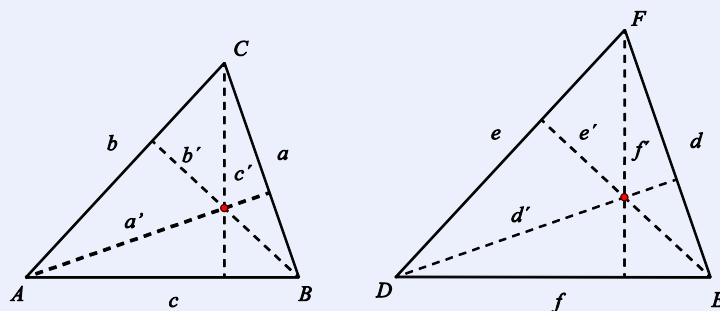
Áreas de triángulos especiales. Ver figura.



Teorema

Si el triángulo ABC es semejante al triángulo DEF , entonces:

$$\frac{[ABC]}{[DEF]} = \left(\frac{a}{d}\right)^2 = \left(\frac{b}{e}\right)^2 = \left(\frac{c}{f}\right)^2 = \left(\frac{a'}{d'}\right)^2 = \left(\frac{b'}{e'}\right)^2 = \left(\frac{c'}{f'}\right)^2$$



Es decir, la razón entre las áreas de dos figuras semejantes es igual al cuadrado de la razón de semejanza.

Fórmula de Herón

Sea ABC un triángulo. Si s representa la longitud del semiperímetro del triángulo, o sea,

$$s = \frac{1}{2}(a + b + c),$$

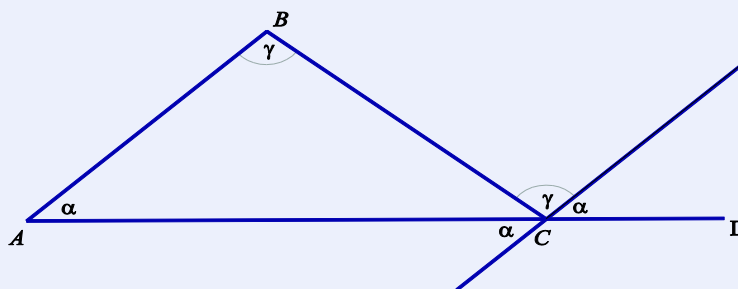
el área del triángulo ABC es:

$$[ABC] = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

Otros resultados importantes

Teorema del ángulo exterior:

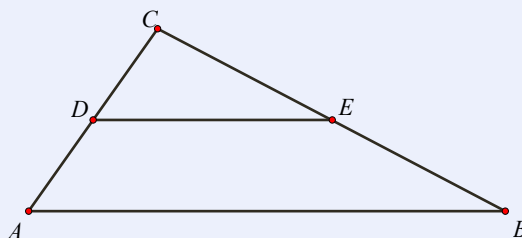
Sea ABC un triángulo. Entonces, si el lado $\overline{AC}$ se extiende hasta el punto D , entonces $m\angle BCD = m\angle BAC + m\angle ABC$.



Teorema del segmento medio

Considérese el triángulo ABC . Supongamos que D es un punto en el lado $\overline{AC}$ y E es un punto en el lado $\overline{BC}$. Entonces $\overline{DE}$ es paralelo a $\overline{AB}$ si y sólo si:

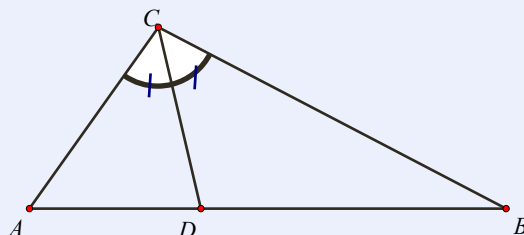
$$\frac{CA}{CD} = \frac{CB}{CE}.$$



Teorema de la bisectriz interna

Si D está en el lado $\overline{AB}$ del triángulo ABC , entonces el segmento $\overline{CD}$ biseca al ángulo $\angle ACB$ si y sólo si:

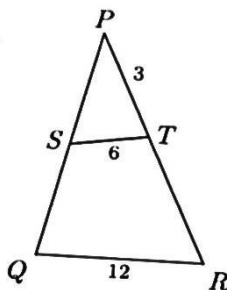
$$\frac{AD}{BD} = \frac{AC}{BC}.$$



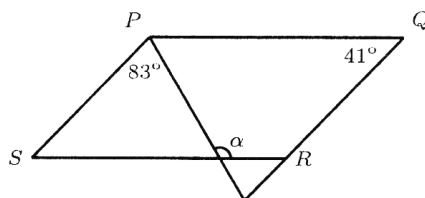
Ejercicios

Ahora puedes aplicar lo aprendido en estos pocos ejercicios:

Ejercicio 1. En el triángulo PQR , $m\angle PST = m\angle PRQ$ y la medida de los lados se muestra. Determina la medida de PQ .



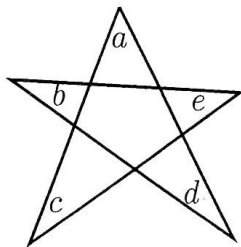
Ejercicio 2. En la figura, $\overline{PQ} \parallel \overline{SR}$ y $\overline{SP} \parallel \overline{QR}$. ¿Cuánto vale α ?



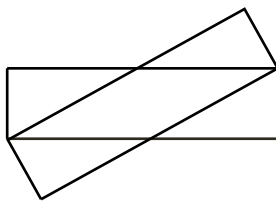
Ejercicio 3. En un pentágono regular $ABCDE$ de lado 1 se ha trazado la diagonal AC . ¿Cuánto vale AC/BC ?

Ejercicio 4. En un triángulo isósceles ABC se tiene que $AB = 2BC$. Si el perímetro del triángulo es 300 mm, ¿cuánto mide AC ?

- Ejercicio 5.** En la figura, los ángulos en cada uno de los vértices de la estrella miden a , b , c , d y e . ¿Cuánto vale la suma $a + b + c + d + e$?



- Ejercicio 6.** Sea ABC un triángulo rectángulo en A . Sea D el pie de la altura desde A . Si $AB = 5$ y $BD = 3$, calcula $[ADC]$.
- Ejercicio 7.** Sea ABC un triángulo rectángulo en C . Sean E y F puntos en la hipotenusa tales que $AE = AC$ y $BF = BC$, ¿cuánto mide el ángulo ECF ?
- Ejercicio 8.** En un triángulo rectángulo de hipotenusa 8 cm y área 9 cm², ¿cuál es su perímetro?
- Ejercicio 9.** Considera un triángulo rectángulo isósceles con un cuadrado inscrito en él. Si el área del triángulo es 1, ¿cuál es el área del cuadrado?
- Ejercicio 10.** Sea $ABCDEF$ un hexágono regular. Sean P y Q los puntos medios de los lados $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$ respectivamente. Determina la medida en grados del ángulo $\angle CPQ$.
- Ejercicio 11.** En el rectángulo $ABCD$, se tiene que $AB = 5$ y $BC = 3$. Los puntos F y G están en el lado $\overline{CD}$ con $DF = 1$ y $GC = 2$. Las rectas $\overline{AF}$ y $\overline{BG}$ se cortan en E . Determina $[AEB]$.
- Ejercicio 12.** En el rectángulo $ABCD$ se tiene que $AD = 1$, P está en $\overline{AB}$ y, $\overline{DB}$ y $\overline{DP}$ trisecan el ángulo $\angle ADC$. Determina el perímetro del triángulo BDP .
- Ejercicio 13.** Dos rectángulos congruentes de lados 3 y 9 cm se encuentran como en la figura. ¿Cuál es el área común de los rectángulos?



- Ejercicio 14.** Las medianas $\overline{CD}$ y $\overline{BE}$ del triángulo ABC son perpendiculares con $BE = 12$ y $CD = 8$. Determina el área del triángulo ABC .

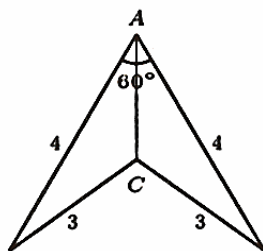
Ejercicio 15. Dos lados de un triángulo acutángulo y la altura sobre el tercer lado tienen longitudes 12, 13 y 15 (no en ese orden). Encuentra el área del triángulo.

Ejercicio 16. En el triángulo ABC se tiene que $AB = 5$, $BC = 7$ y $AC = 9$. D está en el lado $\overline{AC}$ con $BD = 5$. Encuentra el valor de $\frac{AD}{CD}$.

Ejercicio 17. Sea ABC un triángulo equilátero. Sobre la prolongación del lado $\overline{BC}$, se dibuja un punto D con $CD = 2BC$. Sea E el pie de la perpendicular trazada desde D hasta la prolongación del lado $\overline{AC}$. ¿Cuánto mide el ángulo $\angle ABE$?

Ejercicio 18. Desde un punto D en la hipotenusa de un triángulo rectángulo ABC se trazan perpendiculares $\overline{DE}$ y $\overline{DF}$ a los lados $\overline{CA}$ y $\overline{AB}$ respectivamente. Determina el punto D para el cual $\overline{EF}$ tiene longitud mínima.

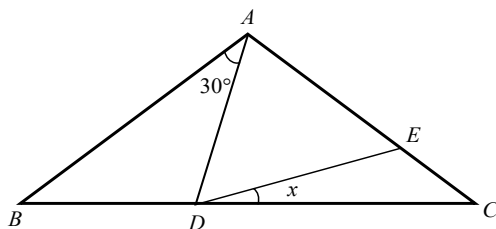
Ejercicio 19. ¿Cuál es la longitud de $\overline{AC}$?



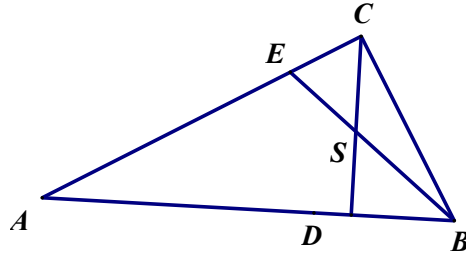
Ejercicio 20. Un alambre de 8 cm se corta en tres pedazos para formar con ellos un triángulo cuyos lados midan, en centímetros, longitudes enteras. ¿Cuánto mide el lado más corto?

Ejercicio 21. En un triángulo ABC , las rectas $\overline{PQ}$ y $\overline{BC}$ son paralelas e interseca a los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ en los puntos P y Q respectivamente. Establece que $\overline{PC}$ y $\overline{QB}$ se cortan en un punto en la mediana de $\overline{AM}$.

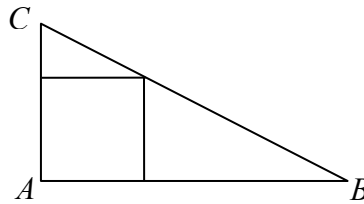
Ejercicio 22. En la figura, $AB = AC$, $AE = AD$ y el ángulo $\angle BAD$ mide 30° . Determina x .



Ejercicio 23. En la figura, el triángulo ABE es isósceles de base $\overline{AB}$ y la medida del ángulo BAC es 30° . Asume que las medidas de los ángulos ACB y ADC es 90° . Encuentra la razón del área del triángulo ESC al área del triángulo ABC .



Ejercicio 24. En el triángulo rectángulo ABC de la figura, está inscrito un cuadrado. Si $AB = 20$ y $AC = 5$, determina qué porcentaje del área del triángulo ABC representa el área del cuadrado.



Ejercicio 25. ¿Cuántos triángulos isósceles, no equiláteros, distintos, pueden construirse con segmentos de 3 cm, 7 cm y 10 cm?

5

POLÍGONOS

5.1 Polígonos

Definición *Polígono*

Se llama polígono a la región del plano limitada por un número finito de segmentos de rectas consecutivos y no alineados.

Polígono convexo:

De manera intuitiva, si se prolongan los lados de un polígono y toda la figura queda siempre del “mismo lado”, se dice que el polígono es convexo.

Elementos de un polígono:

- Lado o arista es cada uno de los segmentos que conforman el polígono.
- Vértice es el punto de unión de dos lados consecutivos.
- Diagonal es el segmento que une dos vértices no consecutivos.
- Perímetro es la suma de la medida de todos sus lados.
- Semiperímetro es la mitad de la suma de la medida de todos sus lados (la mitad del perímetro).
- Ángulo interior es el formado por los lados consecutivos.
- Ángulo exterior es el formado por un lado y la prolongación de un lado consecutivo.

Suma de la medida de los ángulos interiores

Para cualquier polígono de n lados, la suma de la medida de sus ángulos interiores es:

$$(n - 2) \cdot 180^\circ.$$

Definición *Polígono regular*

Un polígono regular es aquél en el cual todos sus lados y sus ángulos interiores son congruentes, de lo contrario, el polígono se llamará irregular.

En un polígono regular podemos distinguir, además:

- el centro, que es el punto equidistante de todos los vértices y lados.
- el apotema, que es el segmento perpendicular que une el centro del polígono con el punto medio de un lado.
- el ángulo central, que es el formado por las semirrectas que parten del centro a los extremos de un lado.

Medida de un ángulo interior de un polígono regular

Cada uno de los ángulos interiores de un polígono regular de n lados mide:

$$\frac{n - 2}{n} \cdot 180^\circ.$$



Medida de un ángulo central de un polígono regular

Los ángulos centrales de un polígono regular de n lados son congruentes y miden: $\frac{360^\circ}{n}$.

Perímetro de un polígono regular

El perímetro de un polígono regular de n lados es igual al producto de n por la medida de uno de sus lados.

Sea l la longitud de uno de los n lados de un polígono regular entonces, su perímetro es:

$$P = l \cdot n.$$

Área de un polígono regular

El área de un polígono regular de n lados es igual a la mitad del producto de su perímetro por su apotema.

Sea a la apotema de un polígono regular de n lados entonces su área es:

$$A = \frac{1}{2} P \cdot a.$$

Clasificación de los Polígonos Regulares según el número de lados	
Número de lados	Nombre
3	Triángulo
4	Cuadrilátero
5	Pentágono
6	Hexágono
7	Heptágono
8	Octágono
9	Nonágono
10	Decágono
11	Endecágono
12	Dodecágono

Si el polígono tiene n lados lo llamamos n -ágono. Para el caso $n=3$ y $n=4$ en vez de llamarlos triángono y tetrágono, usamos triángulo y cuadrilátero.

Estudiaremos seguidamente, los cuadriláteros. Éstos merecen una subsección especial por la abundancia de problemas que se proponen en competencias de matemática.

5.2 Cuadriláteros

Definición Cuadrilátero

Un cuadrilátero es la región del plano limitada por cuatro segmentos llamados lados del cuadrilátero. Nos referiremos siempre a cuadriláteros convexos.

En todo cuadrilátero, la suma de las medidas de sus ángulos internos es 360° .

Los lados que comparten un vértice común los llamaremos lados consecutivos, en caso contrario, lados opuestos.

Clasificación de los Cuadriláteros según el paralelismo de los lados opuestos

Paralelogramo	Los lados opuestos paralelos
Trapezio	Un solo par de lados opuestos paralelos
Trapezoide	No existe paralelismo entre lados

Estudiemos cada una de las figuras.

5.3 Paralelogramos

Clasificación:

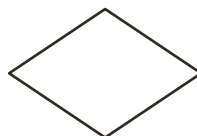
Paralelogramo	
Rectángulo	Los cuatro ángulos internos son rectos, y los lados consecutivos tienen distinta longitud
Cuadrado	Los cuatro ángulos internos son rectos, y los cuatro lados tienen igual longitud
Rombo	Los cuatro lados tienen igual longitud, y los ángulos opuestos tienen igual medida
Romboide	Lados y ángulos consecutivos tienen distintas medidas.



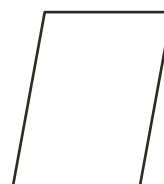
Rectángulo



Cuadrado



Rombo



Romboide

5.4 Segmentos Notables y Propiedades

Definiciones

Segmentos notables de paralelogramos

Altura de un paralelogramo:

Segmento trazado perpendicularmente desde un vértice del paralelogramo al lado opuesto.

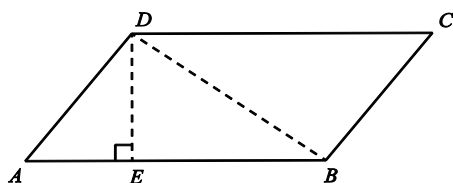
Diagonal de un paralelogramo:

Segmento que une dos vértices no consecutivos. Cada paralelogramo consta de dos diagonales.

Base de un paralelogramo:

Lado sobre el cual descansa o se supone que descansa el paralelogramo.

En la figura siguiente, $\overline{DE}$ es una altura, $\overline{DB}$ es una diagonal y $\overline{AB}$ la consideraremos base.



En particular se tienen las siguientes propiedades.

Propiedades del rectángulo, cuadrado y rombo

El Rectángulo

Las diagonales del rectángulo tienen igual longitud y se bisecan mutuamente.

Si b es la medida de la base y h es la medida de la altura, el rectángulo tiene

$$\text{perímetro: } P = 2 \cdot (b + h) \quad \text{y} \quad \text{área: } A = b \cdot h.$$

El Cuadrado

Las diagonales de un cuadrado son perpendiculares entre sí, y sus longitudes son iguales. Las diagonales se bisecan mutuamente, y bisecan los ángulos del cuadrado.

Las diagonales de un cuadrado lo dividen en cuatro triángulos rectángulos isósceles congruentes.

Si a es la medida del lado, el cuadrado tiene

$$\text{perímetro: } P = 4 \cdot a \quad \text{y} \quad \text{área: } A = a^2.$$

El Rombo

Las diagonales de un rombo son perpendiculares entre sí. Las diagonales se bisecan mutuamente, y bisecan los ángulos del rombo.

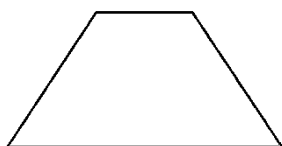
Si a es la medida del lado y si d_1 y d_2 son las medidas de las diagonales, el rombo tiene

$$\text{perímetro: } P = 4 \cdot a \quad \text{y} \quad \text{área: } A = \frac{1}{2} d_1 d_2.$$

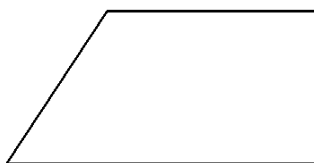
5.5 Trapecios

Clasificación:

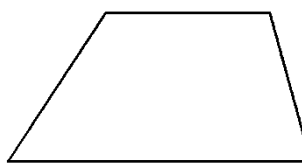
Trapecio	
Trapecio isósceles	Los lados no paralelos tienen igual longitud
Trapecio Rectángulo	Tiene dos ángulos internos rectos
Trapecio escaleno	No son trapecios rectángulos ni trapecios isósceles



trapecio isósceles



trapecio rectángulo



trapecio escaleno

5.6 Segmentos Notables y Propiedades

Definiciones

Segmentos notables de trapecios

Bases del trapecio:

Se les llama así a los lados paralelos.

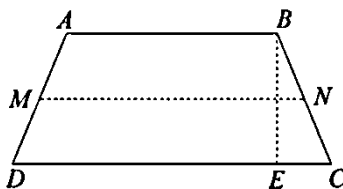
Mediana del trapecio:

Es el segmento que une a los puntos medios de los lados no paralelos. La mediana mide la semisuma de las longitudes de las bases.

Altura del trapecio:

Es segmento perpendicular trazado desde el vértice del trapecio al lado opuesto.

En la figura siguiente los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son bases del trapecio, $\overline{BE}$ es la altura y $\overline{MN}$ es la mediana.

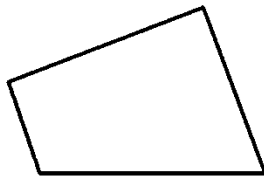


Si B es la longitud de la base mayor, b es la longitud de la base menor y h es la medida de la altura, el área de un trapecio es:

$$A = \frac{B+b}{2} \cdot h$$

5.7 Trapezoides

El trapezoide no tiene propiedades especiales. Por este motivo, algunos autores evitan usar el nombre trapezoide, refiriéndose a él simplemente como cuadrilátero.



Ejercicios

Con lo aprendido en esta sección podrás resolver los ejercicios que te proponemos:

Ejercicio 1. Indica qué propiedades de la derecha tienen las figuras de la izquierda:

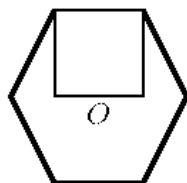
- | | |
|--------------------------|---|
| Cuadrado | a) Cuatro lados iguales. |
| Rectángulo (no cuadrado) | b) Cuatro ángulos rectos. |
| Rombo (no cuadrados) | c) Ángulos opuestos iguales. |
| Romboide | d) Diagonales perpendiculares. |
| Trapezio | e) Diagonales que se cortan en los puntos medios. |
| Paralelogramo | f) Diagonales no perpendiculares. |
| Trapezoide | g) Cuatro ejes de simetría. |
| | h) Dos ejes de simetría. |

Ejercicio 2. La base mayor de un trapezio rectángulo mide 12 cm, su diagonal mayor, 13 cm y el lado oblicuo, 10 cm. Halla la altura y constrúyelo. Halla también la longitud de la base menor.

Ejercicio 3. Un rectángulo mide 7 metros de largo y 3 metros de ancho. ¿Cuál es la medida del lado del cuadrado que tiene igual perímetro que el rectángulo?

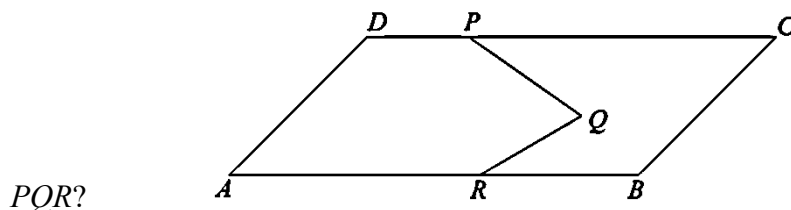
Ejercicio 4. Los perímetros de un triángulo equilátero y un hexágono regular son iguales. ¿Cuál es la razón de sus áreas?

Ejercicio 5. En la figura se muestra un hexágono regular de centro O y un cuadrado, ¿cuál es la razón del área del hexágono al del cuadrado?



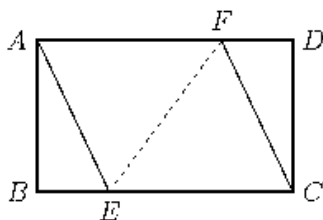
Ejercicio 6. ¿Cuántas diagonales pueden trazarse desde un vértice de un polígono de n lados? ¿Cuántas diagonales tiene un polígono de n lados?

Ejercicio 7. Considera el paralelogramo $ABCD$ con los puntos P , Q y R indicados. Si $m\angle ARQ = 150^\circ$, $m\angle QPC = 35^\circ$, y $m\angle PCB = 45^\circ$, ¿cuánto vale $m\angle PQR$?



Ejercicio 8. Sean A, B, C, D, E, F los vértices de un hexágono regular.
 a) ¿Cuántos triángulos se pueden formar con vértices en estos seis puntos?
 b) Dividamos a los triángulos en grupos, según su área. (En cada grupo reunimos todos los de una misma área). ¿Cuántos grupos hay?

Ejercicio 9. Sea $ABCD$ un rectángulo. En los lados $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ se escogen los puntos F y E respectivamente, tal que $AECF$ es un rombo. Si $AD=16$ y $AB=12$, encuentra EF .



Ejercicio 10. El cuadrilátero $ABCD$ es tal que sus lados $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son paralelos. Sean M y N los puntos medios de los segmentos $\overline{CD}$ y $\overline{BC}$ respectivamente. Sea I el punto de corte de las rectas $\overleftrightarrow{AM}$ y $\overleftrightarrow{DN}$. Asumamos que $\frac{IM}{AI} = \frac{1}{4}$. Establece que $ABCD$ es un paralelogramo. **Nota:** Orienta la figura en sentido anti horario.

6

LA CIRCUNFERENCIA Y EL CÍRCULO

6.1 Definiciones

Definición *Circunferencia*

Una **circunferencia** es el conjunto de puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado centro de la circunferencia. Cualquier segmento que parta del centro y cuya longitud sea la distancia fija es llamado **radio** de la circunferencia.

El término radio también se usa para referirse a la distancia fija del centro de la circunferencia a los puntos de la circunferencia. Esto puede causar confusión, pero el contexto hará que la distinción entre una y otra no presente dificultad.

Llamaremos **círculo** a la circunferencia con su interior.

Definiciones *Rectas y Segmentos*

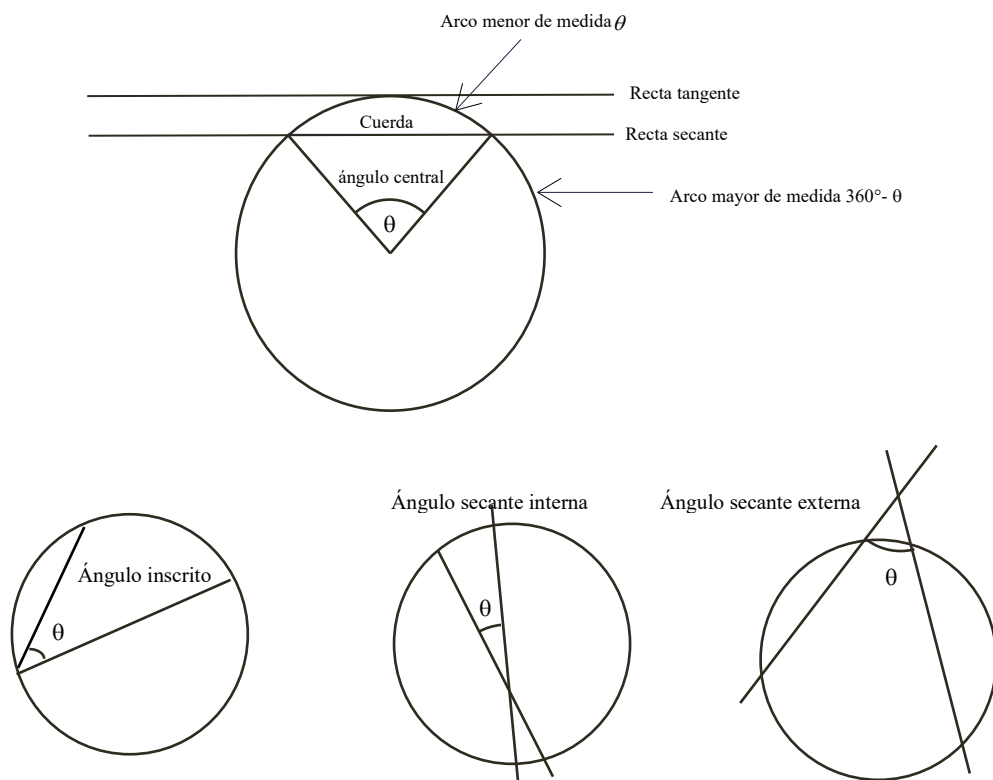
- Toda recta que tiene exactamente un punto en común con una circunferencia es llamada **tangente** a la circunferencia.
- Toda recta que corta a una circunferencia en dos puntos se dice **secante** a la circunferencia.
- A todo segmento que une dos puntos de la circunferencia se le denomina **cuerda** de la circunferencia. Toda cuerda divide a una circunferencia en dos porciones. A la porción mayor y a la menor se les denomina arco mayor y arco menor respectivamente. Al arco menor que une los puntos A y B se le denota AB .
- El **diámetro** de una circunferencia es toda cuerda que pasa por el centro de la misma. El término diámetro se usa también para hablar de la longitud de un diámetro. La longitud de diámetro es el doble de la longitud del radio. Cuando una cuerda es un diámetro, ambas porciones de la circunferencia tienen igual longitud y se les denomina semicircunferencias.

Definiciones *Ángulos de la Circunferencia*

- Un **ángulo central** de una circunferencia es todo ángulo cuyo vértice es el centro de la circunferencia y sus lados son dos radios. La medida del ángulo central es igual a la medida del arco que abarca.
- Un **ángulo inscrito** es aquel que tiene su vértice en la circunferencia y sus lados son secantes a ella.
- Un **ángulo semi-inscrito** es aquel que tiene su vértice en un punto de la circunferencia y un lado es tangente y el otro secante a ella.
- Un **ángulo secante interna o ángulo interior** es aquel que tiene su vértice en un punto interior del círculo. Sus lados son rectas secantes a la circunferencia.

- Un **ángulo secante externa o ángulo exterior** es aquel que tiene su vértice en un punto fuera de la circunferencia y del círculo y sus lados son secantes o tangentes de la circunferencia.

Observa las ilustraciones de algunos de los términos y más adelante se presentarán los teoremas concernientes a las medidas de los ángulos.



Se incluyen otras definiciones importantes:

Definición *Polígono inscrito*

Un polígono está inscrito en una circunferencia si todos sus vértices están contenidos en ella. Así mismo una **circunferencia circunscrita** es la que toca a cada vértice del polígono. Su centro equidista de todos los vértices.

En un triángulo, el **circuncírculo** es la circunferencia que pasa por sus tres vértices. El **incírculo** es la circunferencia de mayor diámetro que se puede inscribir en el triángulo; es tangente a los tres lados.

6.2 *Resultados Básicos*

Área:

El área de un círculo de radio r es πr^2

Perímetro:

La longitud de una circunferencia de radio r es $2\pi r$.

De los dos resultados anteriores se deduce que la razón del área del círculo a la longitud de la circunferencia es $r/2$.

Con frecuencia es necesario determinar el centro de una circunferencia dada. Los próximos resultados nos permiten encontrar este punto.

Teoremas

- Una recta secante pasa por el centro de una circunferencia si y sólo si la recta es perpendicular a la recta tangente en cada punto de intersección con la circunferencia.
- Una recta secante que es perpendicular a una cuerda pasa por el centro de la circunferencia si y sólo si biseca a la cuerda.

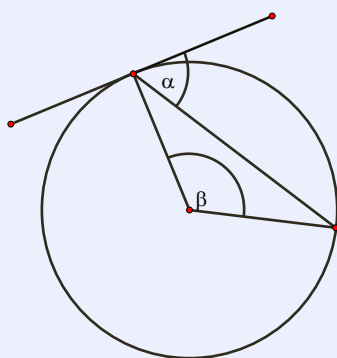
Y un resultado que se emplea a menudo:

- Supongamos que P es un punto externo con respecto a una circunferencia de centro O . Existen dos rectas que pasan por P y son tangentes a la circunferencia dada. Los segmentos determinados por P y los puntos de tangencia son ambos congruentes. O sea, tienen igual longitud. El ángulo que tiene como vértice al punto P y como lados a las rectas tangentes a la circunferencia dada, es bisecado por el segmento $\overline{OP}$.

Resultados concernientes a los ángulos en la circunferencia

Teorema de la cuerda tangente

El ángulo central determinado por una cuerda de una circunferencia que no es un diámetro, tiene medida el doble de la medida del ángulo formado por la cuerda y la recta tangente a la circunferencia en uno de los extremos de la cuerda.

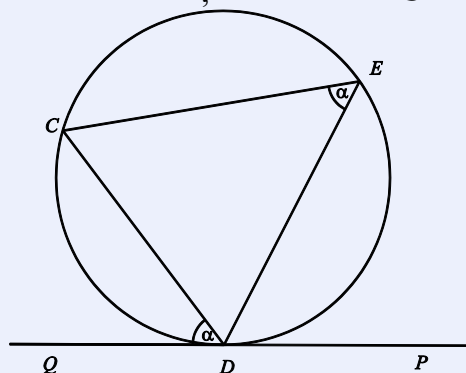


En símbolos y con respecto a la figura, $\beta = 2\alpha$.

Entonces la medida de un ángulo semi-inscrito es la mitad de la medida del ángulo central que abarca el mismo arco.

Teorema del segmento alterno

Dada una circunferencia y una recta $\overleftrightarrow{PQ}$ tangente a la circunferencia en D . Considera la cuerda $\overline{CD}$ donde C es un punto sobre la circunferencia. Si E es un punto cualquiera en el arco mayor determinado por la cuerda $\overline{CD}$, entonces $m\angle QDC = m\angle CED$.



Teorema de la medida del ángulo inscrito

La medida del ángulo inscrito en una circunferencia es igual a la mitad de la medida del arco comprendido entre sus lados, es decir la mitad de la medida del ángulo central que abre el mismo arco.

Como consecuencia de este teorema se tienen los siguientes corolarios.

Corolarios

- Todos los ángulos inscritos que abren un mismo arco tienen igual medida.
- Sean A y C dos puntos fijos sobre una circunferencia. Para cualesquiera dos puntos B y B' de la circunferencia se tiene que $m\angle ABC = m\angle AB'C$ o bien $\angle ABC$ y $\angle AB'C$ son suplementarios.
- Sean A y C dos puntos fijos sobre una circunferencia. El conjunto de los puntos B que cumplen que el ángulo $\angle ABC$ es constante, consta de dos arcos de circunferencia del mismo radio.
- Sean A y C dos puntos fijos sobre una circunferencia. El conjunto de los puntos B que cumplen que el ángulo $\angle ABC$ es un ángulo recto, es una circunferencia de diámetro $\overline{AC}$.

Teorema de las secantes internas

Supongamos que dos rectas secantes a una circunferencia, $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, se cortan en su interior en un punto P . Entonces $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.

Además, $m\angle APD = m\angle BPC = \frac{1}{2}(\theta + \varphi) = \frac{1}{2}(AD + BC)$.

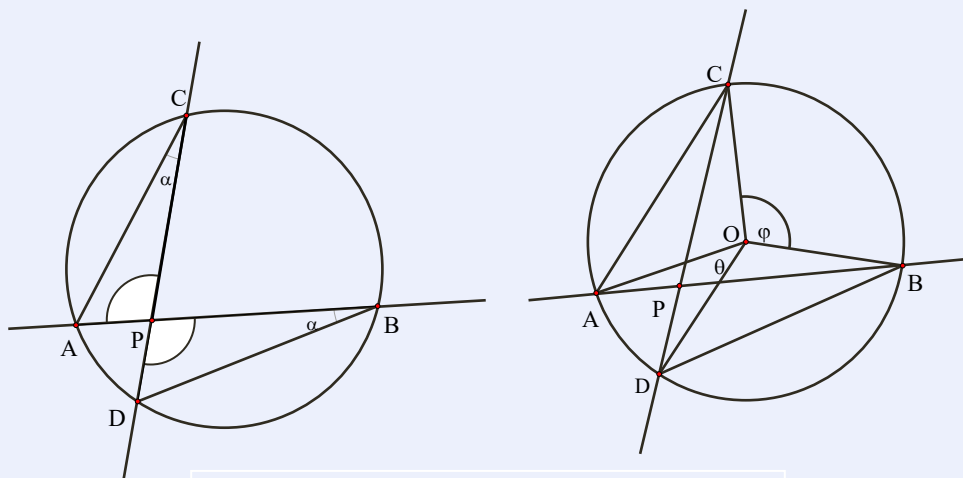


Figura 1: Teorema de las secantes internas

Entonces un ángulo interior mide la mitad de la suma de las medidas de los arcos que abarcan sus lados y las prolongaciones de los mismos.

Teorema de las secantes externas

Supongamos que dos rectas secantes a una circunferencia, $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, se cortan en su exterior en un punto P . Entonces $PA \cdot PB = PC \cdot PD$. Además:

$$m\angle APD = m\angle BPC = \frac{1}{2}(\varphi - \theta) = \frac{1}{2}(BC - AD).$$

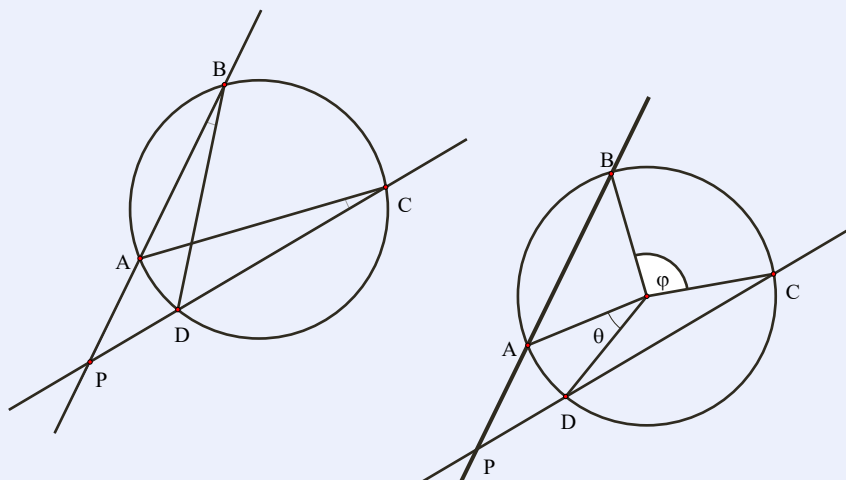


Figura 2: Teorema de las secantes externas

Entonces la medida de un ángulo exterior es la mitad de la diferencia de los arcos que abarca el ángulo.

Potencia de un punto con respecto a una circunferencia

¿Recuerdas los teoremas de la secante interna y de la secante externa? En ambos resulta, $PA \cdot PB = PC \cdot PD$. Además,

Teorema

Si A, B, C son puntos sobre una circunferencia y si la recta tangente en C , interseca en un punto P a la prolongación de la cuerda $\overline{AB}$, entonces:

$$PC^2 = PA \cdot PB.$$

Teoremas:

1. Si $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son dos segmentos que se cortan en un punto P de manera que, como segmentos dirigidos, $PA \cdot PB = PC \cdot PD$, entonces los puntos A, B, C, D se encuentran sobre una circunferencia.
2. Si A, B, C y P son puntos tales que P, A y B están alineados y $PC^2 = PA \cdot PB$, entonces la recta $\overline{PC}$ es tangente en C al circuncírculo del triángulo ABC .

Entonces, para un punto P , una circunferencia $\mathcal{C}$ y cualquier recta que pasa por P y corte a $\mathcal{C}$ en puntos A y B , tenemos que $PA \cdot PB$ es constante. Esa cantidad constante se denomina la potencia del punto P .

Si el punto P es **exterior** a la circunferencia, la potencia de P es $PA \cdot PB$. Al tomar a P como origen de medida, PA y PB tienen el mismo signo, por lo que, si P es exterior a la circunferencia, $PA \cdot PB$ es **positiva**.

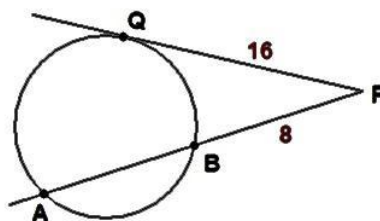
Si el punto P es **interior** a la circunferencia, la potencia de P es $PA \cdot PB$. Al tomar P como origen de medida, PA y PB tienen distinto signo, por lo que si P es interior a la circunferencia, $PA \cdot PB$ es **negativa**.

Si el punto P está en la circunferencia, entonces $PA \cdot PB = 0$.

Ejercicios

Estudia los conceptos y resultados y resuelve los ejercicios que te presentamos.

Ejercicio 1. En la figura, $\overline{PQ}$ es tangente a la circunferencia y $\overline{PA}$ es secante, encuentra la longitud de la cuerda AB .



Ejercicio 2. ¿Cuál es el perímetro de la circunferencia que circunscribe al triángulo de lados 3, 4 y 5?

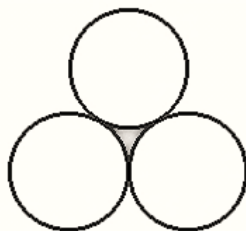
Ejercicio 3. Una cuerda de 10 cm de longitud se traza en una circunferencia de 26 cm de diámetro. La distancia en centímetros de la cuerda al centro de la circunferencia es:

- a) 12 b) 7 c) 10 d) 8

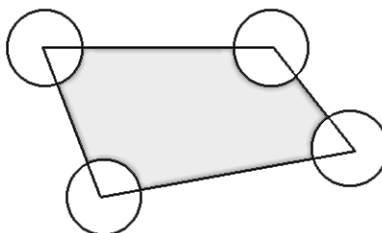
Ejercicio 4. Una pizza de 10 pulgadas de diámetro se corta en tres pedazos iguales, una pizza de 12 pulgadas de diámetro se corta en cuatro pedazos iguales, una pizza de 14 pulgadas de diámetro se corta en seis pedazos iguales y una pizza de 16 pulgadas de diámetro se corta en ocho pedazos iguales. Si quiero comer la mayor cantidad, debo tomar un pedazo de la pizza de:

- a) 10" b) 12" c) 14" d) 16" e) da igual

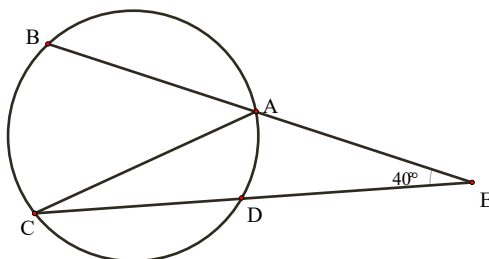
Ejercicio 5. ¿Cuál es el área de la región sombreada en la figura, donde las circunferencias son todas de radio r ?



Ejercicio 6. Considera un cuadrilátero cualquiera con área igual a 5 y lados mayores o iguales a 2. Se tienen cuatro circunferencias de radio 1, con centro en cada uno de los vértices del cuadrilátero. Encontrar el área de la región sombreada de la figura.



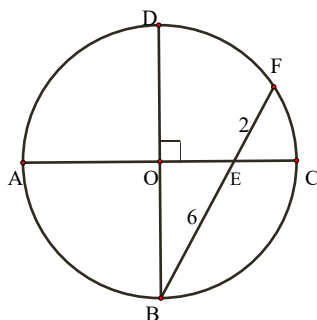
Ejercicio 7. En la figura, $m\angle AED = 40^\circ$ y los arcos AB , BC , CD son congruentes. ¿Cuál es la medida del ángulo $\angle ACD$?



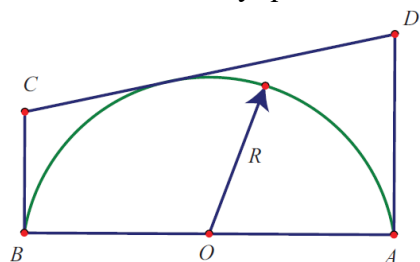
Ejercicio 8. Un triángulo agudo isósceles ABC está inscrito en una circunferencia. Se trazan rectas tangentes a la circunferencia en B y C , y se cortan en el punto D con la condición que $m\angle ABC = m\angle ACB = 2m\angle CDB$. Determina la medida en radianes del ángulo $\angle BAC$.

Ejercicio 9. Dos cuerdas paralelas en una circunferencia tienen longitud 10 y 14 unidades respectivamente y la distancia entre ambas es de 6 unidades. Encuentra la longitud de la cuerda paralela que se encuentra entre ambas a igual distancia.

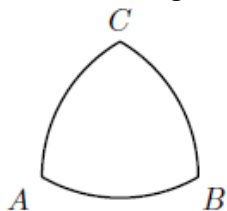
Ejercicio 10. En la figura, $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ son diámetros de una circunferencia de centro O y $\overline{AC}$ es perpendicular a $\overline{BD}$. La cuerda $\overline{BF}$ corta a la cuerda $\overline{AC}$ en E con $BE = 6$ y $EF = 2$. ¿Cuál es el área del círculo?



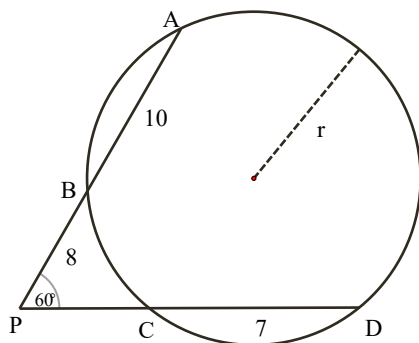
Ejercicio 11. Asumiendo que $BC + AD = 12$ y que $AB + CD = 20$. Calcula el valor de R .



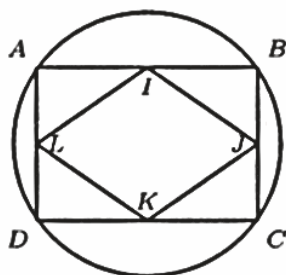
- Ejercicio 12.** Encuentra el perímetro de la figura, construida trazando los arcos con centros en los vértices de un triángulo equilátero de lado de longitud 1 cm y radio igual a la medida del lado del triángulo.



- Ejercicio 13.** Una circunferencia de radio r tiene una cuerda $\overline{AB}$ de longitud 10 y una cuerda $\overline{CD}$ de longitud 7, las cuales se extienden por B y C , respectivamente, hasta cortarse en P fuera de la circunferencia. Además se tiene, $m\angle APD = 60^\circ$ y $BP = 8$. Encuentra el valor de r^2 .



- Ejercicio 14.** En un círculo de radio 3 está inscrito un rectángulo $ABCD$. Sean I, J, K y L los puntos medios de los lados de $ABCD$, como se indica en la figura. ¿Cuál es el perímetro del cuadrilátero $IJKL$?



- Ejercicio 15.** Prueba que si dos circunferencias se intersectan, la cuerda en común biseca las tangentes comunes a dichas circunferencias.

7

ELEMENTOS DE LA TEORÍA COMBINATORIA
Y PRINCIPIO DE LAS CASILLAS

7.1 Regla del Producto y de la Suma

Métodos de conteo:

Principio del Producto

Si un evento puede ocurrir de n maneras distintas y después que ha ocurrido de una cualquiera de esas maneras, un segundo evento puede ocurrir de p maneras distintas, entonces los dos eventos, en ese orden, pueden ocurrir en $n \times p$ maneras.

Principio de la Suma

Sean A y B dos conjuntos disjuntos. Denotemos por $|A|$ el número de elementos del conjunto A . El número de posibles elementos que se pueden seleccionar de A o de B es $|A| + |B|$.

Ejemplo 1: En el restaurante *Mi comida*, para el almuerzo se puede escoger entre tres platos principales: arroz con pollo, sancocho, o tamal y dos bebidas: de naranja o piña. ¿Cuántas opciones de almuerzo tenemos?

Solución: El primer paso consiste en elegir el plato principal y el segundo paso, elegir la bebida. Por el principio del Producto, existen

$$3 \times 2 = 6 \text{ opciones.}$$

Ejemplo 2: ¿Cuántos números de cuatro dígitos se pueden formar con los dígitos 1, 2, 3, 4, 5 y 6, si no se permite las repeticiones?

Solución: Aplicando el Principio del Producto, el primer dígito puede elegirse de 6 maneras, el segundo, de 5 maneras, el tercero, de 4 maneras y el cuarto dígito de 3 maneras. En total,

$$6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360 \text{ números.}$$

Ejemplo 3: ¿Cuántos números pares de cuatro dígitos se pueden formar con los dígitos 1, 2, 3, 4, 5 y 6, si no se permite las repeticiones?

Solución: Aplicando el Principio de la Suma, si el número debe ser par, el dígito de las unidades debe ser 2, 4 o 6. Por lo tanto el dígito de las unidades se puede escoger de 3 maneras. Para cada una de esas maneras, los tres dígitos que faltan se llenan con los 5 números restantes. Así, con las condiciones dadas, hay

$$5 \times 4 \times 3 \times 3 = 180 \text{ números.}$$

7.2 Permutaciones y Combinaciones

Definición Permutaciones

Una permutación de n elementos distintos es una ordenación de los n elementos. El número de permutaciones de n elementos es $n!$.

Definición Factorial

El **símbolo factorial**, $!$, significa que se multiplican los números desde n hasta 1. Así:

- $1! = 1$
- $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$
- $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

y se define $0! = 1$.

Definición Combinación

Una combinación de r elementos de un grupo de n elementos con $n > r$, es una selección no ordenada de r de los n elementos. El número de combinaciones de r elementos de un conjunto de n elementos se denota $C(n, r)$ ó $\binom{n}{r}$ y se tiene que $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$.

En las Permutaciones	importa el orden
En las Combinaciones	no importa el orden

Ejemplo 4: ¿De cuántas maneras se pueden formar cuatro niños y seis niñas en la fila?

Solución: En total son diez niños que deben ordenarse en la fila, luego existen $10!$ maneras de ordenarlos.

Ejemplo 5: ¿De cuántas maneras se pueden formar cuatro niños y seis niñas en la fila, si las niñas deben ir juntos y los niños también?

Solución: Los niños se ordenan y se pueden considerar como un bloque y las niñas también se ordenan como otro bloque. Entre sí los dos bloques puede ordenarse de $2!$ maneras. Además, los niños se ordenan de $4!$ maneras en su bloque y las niñas, de $6!$ maneras. Por la regla del producto, la respuesta sería:

$$2 \times 4! \times 6! = 34\,560.$$

Ejemplo 6: ¿De cuántas maneras se pueden formar cuatro niños y seis niñas en la fila, si los niños deben ir juntos?

Solución: Los niños se consideran como un bloque, luego hay que ordenar siete objetos (seis niñas y el bloque de los niños) que se ordenan de $7!$ maneras y los niños se ordenan de $4!$ maneras. Por lo tanto el número requerido es:

$$7! \times 4! = 120\,960.$$

Ejemplo 7: Se tiene un club formado por seis hombres y cinco mujeres. ¿De cuántas maneras se puede seleccionar un comité de cuatro personas?

Solución: Como en un comité no interesa el orden, la respuesta es:

$$\binom{11}{4} = \frac{11!}{4! \cdot 7!} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{4!} = 330 \text{ maneras.}$$

Ejemplo 8: Se tiene un club formado por seis hombres y cinco mujeres. ¿De cuántas maneras se puede seleccionar un comité de cuatro personas que contenga a lo sumo dos hombre?

Solución: El comité puede contener dos hombres, un hombre o ningún hombre. Dos hombres pueden escogerse de $\binom{6}{2}$ maneras y las mujeres de ese comité pueden escogerse de $\binom{5}{2}$

maneras. Si se requiere un hombre, éste puede elegirse de $\binom{6}{1}$ maneras y las mujeres de ese comité de $\binom{5}{3}$ formas. Si el comité contiene sólo mujeres, existen $\binom{5}{4}$ formas de elegir las.

Aplicando la regla del producto y de la suma se obtiene el número total de comités,

$$\binom{6}{2} \cdot \binom{5}{2} + \binom{6}{1} \cdot \binom{5}{3} + \binom{5}{4} = 150 + 60 + 5 = 215.$$

Ejemplo 9: Se tiene un club formado por seis hombres y cinco mujeres. ¿De cuántas maneras se puede seleccionar un comité de cuatro personas, de manera que Mari y Juan no queden juntos?

Solución: Dentro del comité no se quiere a Mari y a Juan, por lo que calculamos:
(número de los comités) - (número de comités donde estén Mari y Juan).

Esto es,

$$\binom{11}{4} - \binom{9}{2} = 294.$$

Ejemplo 10: Cinco amigos tienen 6, 7, 8, 9 y 10 años. Si escogemos dos de ellos al azar, ¿cuál es la probabilidad de que la diferencia de sus edades sea al menos de dos años?

Solución: Se escogen primero dos amigos y los podemos escoger de $\binom{5}{2} = 10$ maneras. De éstas hay que eliminar aquellas parejas cuya diferencia sea de un año, es decir: el de 6 con el de 7; el de 7 con el de 8; el de 8 con el de 9 y el de 9 con el de 10. En total eliminamos cuatro parejas de amigos. Luego la probabilidad es:

$$\frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}.$$

7.3 Permutaciones y Combinaciones con repetición

- Si se permite repetición de los elementos de un conjunto que contiene n elementos, entonces el número de r -permutaciones es n^r .
- Dado un conjunto de n elementos que incluye n_1 objetos idénticos del tipo 1, n_2 objetos idénticos del tipo 2, ... y n_t objetos idénticos del tipo t , tales que $n_1 + n_2 + \dots + n_t = n$, el número de las diferentes permutaciones del conjunto es igual a:

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_t!}.$$

- El número de r -combinaciones de n tipos de objetos permitiendo repeticiones de los objetos, es:

$$\binom{n+r-1}{r}.$$

Ejemplo 11: ¿De cuántas maneras podría un estudiante responder a una prueba de cierto y falso que contiene diez preguntas?

Solución: Como se repetirá C ó F en sus respuestas, existen 2^{10} maneras posibles de responder.

Ejemplo 12: ¿Cuántos arreglos pueden hacerse con las letras de la palabra CARRETERA?

Solución: Existen 2 letras A, 3 letras R, 2 letras E, 1 letra C y 1 letra T. Luego se tendrán,

$$\frac{9!}{2! \cdot 3! \cdot 2!} = 15\,120 \text{ arreglos.}$$

Si lo hiciéramos por combinaciones, pensaríamos en 9 espacios que debemos llenar con las letras dadas. Dos de esos espacios van a llenarse con las 2 letras A de $\binom{9}{2}$ maneras, tres de los 7 espacios restantes, se llenarán con las 3 letras R de $\binom{7}{3}$ maneras. Dos de los 4 espacios restantes se llenarán con las 2 letras E de $\binom{4}{2}$ maneras y para ubicar la letra C escogemos uno de los dos espacios restantes de $\binom{2}{1}$ maneras. El espacio que queda será para ubicar la letra T. En total tenemos:

$$\binom{9}{2} \cdot \binom{7}{3} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{2}{1} = \frac{9!}{2! \cdot 7!} \cdot \frac{7!}{3! \cdot 4!} \cdot \frac{4!}{2! \cdot 2!} \cdot \frac{2!}{1! \cdot 1!} = \frac{9!}{2! \cdot 3! \cdot 2!}.$$

Ejemplo 13: ¿De cuántas maneras se pueden repartir siete libros distintos entre Ana, Ben y Carlos, si Ana y Carlos deben recibir dos libros cada uno?

Solución: Si colocamos los siete libros en un determinado orden, sólo tendremos que ordenar las letras A, B, C, iniciales de los nombres de cada uno, para saber a quién le daremos un determinado libro. Un ejemplo de tal ordenación sería, A A C B B B C. Así, a Ana le toca el libro 1 y 2, a Ben el libro 4, 5 y 6 y a Carlos el libro 3 y 7. Se repetirá dos veces la A, dos veces la C y tres veces la B. Entonces, el número total de tales ordenaciones sería:

$$\frac{7!}{2! \cdot 3! \cdot 2!} = 210.$$

Ejemplo 14: Hay 3 montones de pelotas rojas, azules y verdes idénticas, cada montón contiene al menos diez pelotas. a) ¿De cuántas maneras se pueden elegir las diez pelotas?

b) ¿De cuántas maneras se pueden elegir las diez pelotas si se debe elegir exactamente una pelota roja?

c) ¿De cuántas maneras se pueden elegir las diez pelotas si se debe elegir al menos una pelota roja?

d) ¿De cuántas maneras se pueden elegir las diez pelotas si se debe elegir a lo sumo una pelota roja?

Solución:

a) Hay $n = 3$ tipos de pelotas y $r = 10$ pelotas para escoger con repetición. El número de maneras de hacer la selección es:

$$\binom{n+r-1}{r} = \binom{12}{10} = 66.$$

b) Se toma una pelota roja y se separa. Nos queda por seleccionar 9 pelotas de los 2 tipos restantes, azules y verdes, e incluir la bola roja separada, en cada selección. Se tendrán:

$$\binom{n+r-1}{r} = \binom{2+9-1}{9} = \binom{10}{9} = 10.$$

c) Se toma una pelota roja y se separa. Nos queda por seleccionar 9 pelotas de los 3 tipos e incluir la bola roja separada, en cada selección. Se tendrán:

$$\binom{n+r-1}{r} = \binom{11}{9} = 55.$$

d) Las selecciones no contendrán pelotas rojas o contendrá exactamente una pelota roja. Luego el número de selecciones será:

$$\binom{2+10-1}{10} + \binom{2+9-1}{9} = 11 + 10 = 21.$$

En resumen:

	Sin repetición	Con repetición
Permutaciones	de r elementos tomados de n $P(r, n) = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$	de n elementos en los que hay n_1 objetos idénticos del tipo 1, n_2 objetos idénticos del tipo 2, ..., y n_t objetos idénticos del tipo t $\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_t!}$
Combinaciones	de r elementos tomados de n $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$	de r elementos tomados de n tipos de objetos permitiendo repeticiones de los objetos $\binom{n+r-1}{r}$

Ejercicios

Te invitamos a resolver estos ejercicios para que apliques lo que has aprendido:

- Ejercicio 1.** ¿Cuántos diccionarios hay que editar para que se puedan efectuar directamente traducciones entre cualesquiera dos de los cinco idiomas: español, ruso, inglés, francés y alemán?
- Ejercicio 2.** Aquiles olvidó los cuatro números de su tarjeta CLAVE. Recuerda que no contiene cifras repetidas, que las tres primeras cifras están, en algún orden, en su número de cédula y que la cuarta cifra no está en su número de cédula. El número de cédula de Aquiles es 2-712-7887. ¿Cuántos son los posibles números de la tarjeta de Aquiles?
- Ejercicio 3.** ¿De cuántas maneras puedes escoger tres números enteros entre el 1 y el 21 de manera que la suma de ellos sea un número par?
- Ejercicio 4.** Encuentra cuántos números pares de tres cifras se forman sin repetir las cifras.
- Ejercicio 5.** Suponiendo que no se permiten repeticiones, a) ¿cuántos números de tres cifras se pueden formar con los dígitos 2, 3, 5, 6, 7 y 9? b) ¿cuántos de éstos números son menores que 400? c) ¿cuántos son pares?
- Ejercicio 6.** ¿Cuántos números enteros positivos no mayores que 1000 hay que son divisibles por 7 ó por 11?
- Ejercicio 7.** ¿Cuántas permutaciones de las letras A, B, C, D, E, F, G contienen a) la secuencia DCB , b) la secuencia $FDGA$.

- Ejercicio 8.** Mi abuelita quiere hacer una fiesta para celebrar su cumpleaños y tiene 11 amigos de los cuales 6 son mujeres.
- a) ¿De cuántas maneras puede invitar a tres o más personas a la fiesta?
 - b) ¿De cuántas maneras puede invitar a tres o más personas si debe haber el mismo número de hombres que mujeres (incluyéndola a ella).
- Ejercicio 9.** En una urna se colocan 2011 balotas numeradas del 1 al 2011. Se sacan al azar dos balotas y se suman los números en ellas, ¿qué es más probable, que la suma sea par o que la suma sea impar?
- Ejercicio 10.** ¿Cuántas palabras diferentes se pueden formar borrando al menos una letra de la palabra RECOGER? Así se obtiene, por ejemplo, R, RER, OGER.
- Ejercicio 11.** Se lanza diez veces una moneda y el resultado puede ser cara o sello.
- i. ¿Cuántos resultados son posibles?
 - ii. ¿Cuántos resultados contienen exactamente dos caras?
 - iii. ¿Cuántos resultados contienen a lo sumo tres sellos?
- Ejercicio 12.** Encuentra el número de maneras como se pueden repartir 9 juguetes distintos entre 4 niños si el menor debe recibir 3 juguetes y los otros, 2 juguetes.
- Ejercicio 13.**
- a) ¿Dé cuántas maneras se pueden ordenar 2 libros de arte, 5 de latín y 3 de ciencias en la repisa de un armario?
 - b) ¿De cuántas maneras se pueden escoger cuatro libros de la repisa si a lo sumo debo tener uno de latín? (asuma que todos los libros son diferentes)
 - c) ¿De cuántas maneras se pueden escoger dos libros de la repisa si a lo sumo debo tener uno de latín? (asuma que los libros de cada materia son iguales)
- Ejercicio 14.** En la panadería *El Confite* hay bandejas de galletas de vainilla, coco y fresa. Al menos hay 6 galletas de cada tipo en las bandejas. ¿Cuántas selecciones diferentes pueden hacerse al comprar 6 galletas? ¿Cuántas selecciones diferentes pueden hacerse al comprar 6 galletas si se desea exactamente dos de fresa?
- Ejercicio 15.** ¿De cuántas maneras se pueden arreglar las letras de la palabra ABRACADABRA?

7.4 Principio de las casillas

Una versión sencilla de este principio se puede enunciar de la siguiente manera:

Principio de las casillas

Si $n+1$ objetos se deben colocar en n casillas, entonces en alguna hay al menos dos objetos.

Este resultado también se conoce como el Principio de Dirichlet o el Principio del palomar o de la “pichonera”.

Este principio, aparentemente trivial, es muy poderoso.

Ejemplo 1: Reunidos 13 niños, hay al menos dos que cumplen años en el mismo mes.

El Principio de las Casillas es útil al probar la existencia de situaciones sin identificarlas de forma concreta. En el caso del ejemplo anterior, no sabemos cuáles niños cumplen en el mismo mes o qué mes sea o cuántos son los que cumplen en ese mes.

En los ejemplos que siguen, nuestro reto será descubrir cuáles son las casillas y cuáles los objetos.

Ejemplo 2: Aquiles le dice a Juan que en cualquier lista de trece números enteros que le dé, hay dos números cuya diferencia es un múltiplo de 12. ¿Cómo puede estar tan seguro?

Solución: Aquiles sabe que hay exactamente doce posibles residuos al dividir un número por 12: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, y 11. Los doce residuos diferentes son las casillas y los trece números, los objetos. La diferencia de los dos números con igual residuo es un múltiplo de 12. ¿Puedes relacionar este ejemplo con congruencias?

Ejemplo 3: Demuestra que si se tienen 7 números naturales que son cuadrados perfectos, entonces existen al menos dos de ellos cuya diferencia es divisible por diez.

Solución: Observa que los cuadrados perfectos terminan en 0, 1, 4, 5, 6 y 9; es decir, podemos encontrar seis números cuadrados perfectos que terminen en cada uno de estos seis números; las terminaciones son las casillas. Sin embargo el séptimo debe coincidir con la terminación de alguno de los anteriores. La diferencia de ellos terminará en cero y por lo tanto es divisible por diez.

Ejemplo 4: Dentro de un cuadrado de longitud 1 cm se colocan 51 puntos. Demuestra que al menos tres de ellos se pueden incluir en una circunferencia de radio $1/7$ cm.

Solución: Divide el cuadrado en 25 cuadraditos de lados de longitud $1/5$ cm. Esas son las casillas. Por el Principio de Dirichlet, hay al menos tres puntos en uno de los cuadrados. Dibuja una circunferencia que pase por los vértices del cuadrado. Esa circunferencia tendrá como radio $\frac{\sqrt{2}}{10} < \frac{1}{7}$ cm.

Ejercicios

Ánimate a resolver los ejercicios que te presentamos a continuación:

Ejercicio 1. Prueba que en una habitación donde hay ocho personas reunidas, al menos dos de ellas nacieron el mismo día de la semana.

Ejercicio 2. Si una persona puede tener no más de 250.000 cabellos en la cabeza, ¿es posible que en una ciudad de 300.000 habitantes haya dos personas con la misma cantidad de cabellos?

Ejercicio 3. En un cajón hay ocho pares de medias negras y ocho pares blancas. En otro cajón hay siete pares de guantes negros y siete pares blancos. ¿Cuántas medias y cuántos guantes necesitas sacar de cada cajón para tener un par de medias y un par de guantes del mismo color?

- Ejercicio 4.** En la lista de alumnos del colegio hay 18 personas tienen por nombres Alex, Ben y Carlos y por apellido Díaz y Enríquez. Muestra que al menos tres personas tienen el mismo nombre y apellido.
- Ejercicio 5.** Dado un cuadrado unitario, muestra que si cinco puntos son dibujados dentro del cuadrado, dos de ellos está a lo sumo a $\sqrt{2}/2$ unidades de distancia.
- Ejercicio 6.** Cada cuadrado de un tablero 3×3 se llena con los números $-1, 0, 1$. ¿De las sumas posibles de las filas, las columnas y las diagonales habrá dos sumas iguales?
- Ejercicio 7.** Una cuadrícula $n \times n$ se llena con $-1, 0, 1$. Luego se calculan las sumas de los números de cada fila, cada columna y las dos diagonales. ¿Habrá entre estas sumas, dos iguales?
- Ejercicio 8.** Determina si existe algún arreglo en forma circular de los números del 1 al 2011 tal que existan diferencias iguales de dos números que queden consecutivos.
- Ejercicio 9.** La prueba de un concurso de matemática propone 20 problemas de selección múltiple con 5 alternativas cada uno. ¿Cuántos estudiantes deben participar en el concurso para garantizar que haya dos estudiantes con las mismas respuestas?
- Ejercicio 10.** Se tiran dos dados y se anota la suma de los puntos. Prueba que si se realizan doce tiradas, en al menos dos de ellas obtenemos la misma suma.

8

OTROS TEMAS

8.1 Logaritmos

Definición *Logaritmo*

Sean $a \neq 1$ y x números reales positivos, y y un número real. Se define,

$$y = \log_a x \quad \text{si y sólo si} \quad x = a^y.$$

La notación $y = \log_a x$, se lee y es el logaritmo de x en base a . Intuitivamente el logaritmo de x en base a es la potencia a la que se debe elevar a a para obtener x .

Ejemplos:

- $\log_2 8 = 3$ es equivalente a $2^3 = 8$
- $\log_{1/3} 9 = -2$ es equivalente a $(1/3)^{-2} = 9$
- $\log_{25} 5 = 1/2$ es equivalente a $25^{1/2} = 5$.

Como por definición, existe una relación entre el logaritmo y los exponentes, se tienen los siguientes resultados.

Propiedades

Para cualquier número real positivo $a \neq 1$ se cumple que:

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a a = 1$$

$$\log_a \frac{1}{a} = -1$$

Si $a \neq 1$, x e y son números reales positivos y r es cualquier número real, entonces:

$$\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y \qquad \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a x^r = r \log_a x \qquad a^{\log_a x} = x$$

Si $a \neq 1$ y x e y son números reales positivos con $\log_a x = \log_a y$ entonces $x = y$.

Como nuestro sistema numérico tiene base 10, los logaritmos en base 10 fueron muy útiles para hacer cálculos. Los logaritmos base 10 se denominan logaritmos comunes y se denotan $\log x$. Usando tu calculadora familiarízate con los logaritmos comunes buscando el logaritmo de varios números.

Para otras aplicaciones del logaritmo, se usa los de base $e \approx 2,7182$ que se denominan logaritmos naturales y se denotan $\ln x$.

Para cambiar de base utilizamos el siguiente resultado.

Propiedad

Si x , $a \neq 1$ y $b \neq 1$ son números reales positivos se tiene:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

Estudiemos algunos ejemplos de problemas con logaritmos.

Ejemplo1: Si $\log_4 125 = c$ encuentre el valor de $\frac{2}{3}c$.

Solución: Primero usemos las propiedades de los logaritmos y luego escribamos el logaritmo como exponente.

La expresión $\log_4 125 = c$

es equivalente a $\log_4 5^3 = c$

es equivalente a $3\log_4 5 = c$

es equivalente a $\log_4 5 = \frac{c}{3}$

es equivalente a $4^{\frac{c}{3}} = 5$

es equivalente a $2^{\frac{2c}{3}} = 5$

es equivalente a $\frac{2c}{3} = \log_2 5$.

Ejemplo2: Si $\log_{10} 2 = 0,301$ (exacto a 3 decimales), el número de dígitos del número 5^{80} en base 10 es:

a) 40 b) 56 c) 60 d) 80 e) no se puede deducir

Solución: Nota que 10^{80} tiene 81 dígitos. Por otro lado, $10^{80} = 2^{80} \cdot 5^{80}$ y escribiendo como log y aplicando las propiedades,

$$80 = 80 \log 2 + \log 5^{80} = 24,08 + \log 5^{80}.$$

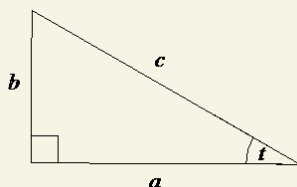
Por lo tanto, $55,92 = \log_{10} 5^{80}$. Luego el número tiene 56 dígitos.

8.2 Razones Trigonométricas

La trigonometría es una rama importante de las matemáticas dedicada al estudio de la relación entre los lados y ángulos de un triángulo rectángulo.

Definición Razones trigonométricas

Las razones trigonométricas básicas de un ángulo dado son el coseno, el seno y tangente. En un triángulo rectángulo se define:



$$\cos t = \frac{a}{c} \quad \text{sen } t = \frac{b}{c} \quad \tan t = \frac{b}{a}$$

Por tratarse de un triángulo rectángulo se deduce que $\cos^2 t + \text{sen}^2 t = 1$.

Existen otras razones trigonométricas definidas como los recíprocos de las anteriores.

Definición Razones trigonométricas recíprocas

Se define para un ángulo t ,

$$\text{Cotangente de } t: \cot t = \frac{1}{\tan t} \quad \text{Secante de } t: \sec t = \frac{1}{\cos t} \quad \text{Cosecante de } t: \csc t = \frac{1}{\text{sen } t}$$

Los siguientes valores de seno y coseno deben conocerse. Te invitamos a comprobarlos aplicando lo que aprendiste para triángulos 30-60-90 y triángulos 45-45-90.

Resultado (Se usa una notación que te ayudará a aprendértelas)

$\text{sen } 0^\circ = \frac{\sqrt{0}}{2}$	$\cos 90^\circ = \frac{\sqrt{0}}{2}$
$\text{sen } 30^\circ = \frac{\sqrt{1}}{2}$	$\cos 60^\circ = \frac{\sqrt{1}}{2}$
$\text{sen } 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$
$\text{sen } 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$\text{sen } 90^\circ = \frac{\sqrt{4}}{2}$	$\cos 0^\circ = \frac{\sqrt{4}}{2}$

Las definiciones de seno y coseno que vimos para los ángulos agudos podemos hacerlas extensibles a ángulos cualesquiera. Basta considerar una circunferencia de radio 1 y las coordenadas del punto final del ángulo α con la circunferencia serán $(\cos \alpha, \sin \alpha)$.

Existen dos identidades que son usadas con frecuencia y de las cuales se deducen importantes resultados.

Propiedades

Sean t_1 y t_2 dos ángulos

$$\sin(t_1 \pm t_2) = \sin t_1 \cos t_2 \pm \cos t_1 \sin t_2$$

$$\cos(t_1 \pm t_2) = \cos t_1 \cos t_2 \mp \sin t_1 \sin t_2$$

Un caso especial se obtiene poniendo $t_1 = t_2$.

Para un ángulo t

$$\sin(2t) = 2 \sin t \cos t$$

$$\cos(2t) = (\cos t)^2 - (\sin t)^2 = 2(\cos t)^2 - 1 = 1 - 2(\sin t)^2$$

$$\left(\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right)^2 = \frac{1 - \cos t}{2} \quad \left(\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right)^2 = \frac{1 + \cos t}{2}$$

Ejemplo 1: Sea $\cos x = \frac{q}{p}$, en donde x es un ángulo agudo. Si p y q difieren por 1, entonces $\sin x$ es igual a:

- a) $\frac{p-q}{p}$ b) $\frac{\sqrt{p-q}}{p}$ c) $\frac{\sqrt{p+q}}{p}$ d) $\frac{\sqrt{p^2+q^2}}{p}$ e) $\frac{p^2-q^2}{p}$

Solución: Por la Identidad de Pitágoras, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, de donde,

$$\sin^2 x = 1 - \left(\frac{q}{p}\right)^2 = \frac{p^2 - q^2}{p^2} = \frac{p+q}{p^2}$$

ya que $p^2 - q^2 = (p+q)(p-q)$ y $p-q=1$, al ser $p > q$.

Ejemplo 2: Sea a un número real. Si $\cos x = a \sin x$, el valor de $(\csc x - a)(\csc x + a)$ es:

- a) $-(1/2)$ b) -1 c) 0 d) $1/2$ e) 1

Solución: Observa que $\frac{\cos x}{\sin x} = a = \cot x$. Pero $\cot^2 x + 1 = \csc^2 x$ y $\csc^2 x - a^2 = 1$, por

lo que $(\csc x - a)(\csc x + a) = 1$.

8.3 Funciones

En este tema requieres tener claro la definición de una función dada y del dominio de la misma. Estudiemos algunos conceptos importantes.

Definición Función

Una **función** f de un conjunto A en un conjunto B es una relación que le hace corresponder a cada elemento del conjunto A un único elemento del conjunto B . Se denota $f : A \rightarrow B$.

Si $f : x \rightarrow y$ escribimos $f(x) = y$ y el elemento y se llama imagen del elemento x .

Definición Dominio y Rango

El conjunto A se denomina dominio de la función. El dominio, en ocasiones, no se especifica pero se considerará como el mayor conjunto de números reales para los cuales la función está definida. El conjunto de los elementos de B a los que la función asocia con algún elemento de A , lo llamaremos rango de la función.

Los problemas sobre funciones que aparecen en las pruebas de olimpiada, suponen que el dominio y rango de las funciones son subconjuntos de los números reales.

Llamamos gráfica de una función de variable real al conjunto de puntos del plano que, en un sistema de ejes cartesianos, tienen coordenadas $(x, f(x))$ donde x pertenece a A .

Ejemplo 1: Se define la función f por $f(n) = (n-1)f(n-1)$, $n > 1$ y $f(1) = 1$, entonces, $f(2011)$ es igual a:

a) $(2010)(2009)$ b) $(2011)(2010)$ c) 2010 d) 2010! e) 2011!

Solución: Usando la definición se calcula la imagen de varios números $f(2), f(3), f(4)$, etc. y se observa que: $f(2) = 1 \cdot 1 = 1$, $f(3) = 2 \cdot 1 = 2!$, $f(4) = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3!$,...

Se deduce entonces: $f(2011) = 2010!$.

Ejemplo 2: Una función f es tal que para todo número x , $f(x) + f(x-1) = x^2$. Si $f(19) = 94$, encuentra $f(94)$.

Solución: Observa que $f(x) + f(x-1) = x^2$, por lo que despejando $f(x) = x^2 - f(x-1)$. Luego,

$$\begin{aligned} f(94) &= 94^2 - f(93) \\ &= 94^2 - 93^2 + f(92). \end{aligned}$$

Continúa este proceso y llegarás a lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 f(94) &= 94^2 - 93^2 + \dots + 22^2 - 21^2 + 20^2 - f(19) \\
 &= (94 + 93)(94 - 93) + \dots + (22 + 21)(22 - 21) + 400 - 94 \\
 &= 94 + 93 + 92 + 91 + \dots + 22 + 21 + 306 \\
 &= \frac{94 \times 95}{2} - \frac{20 \times 21}{2} + 306 \\
 &= 4561.
 \end{aligned}$$

Ejemplo 3: La gráfica de la función $f(x)$ es una recta y se verifica que $f(1) \leq f(2)$, $f(3) \geq f(4)$ y $f(5) = 5$. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?

- a) $f(0) < 0$ b) $f(0) = 0$ c) $f(1) < f(0) < f(-1)$ d) $f(0) = 5$

Solución: Como la gráfica de f es una recta, pongamos que $f(x) = ax + b$. Además, por los datos del problema, $f(1) \leq f(2)$, entonces $a + b \leq 2a + b$ lo que implica que $0 \leq a$. Por otro lado, como $f(3) \geq f(4)$, entonces $3a + b \geq 4a + b$, lo que implica que $0 \geq a$. Luego debe ser que $a = 0$, de donde $f(x) = b$. Y como $f(5) = 5$ es que $f(0) = 5$.

Por último veamos dos funciones interesantes.

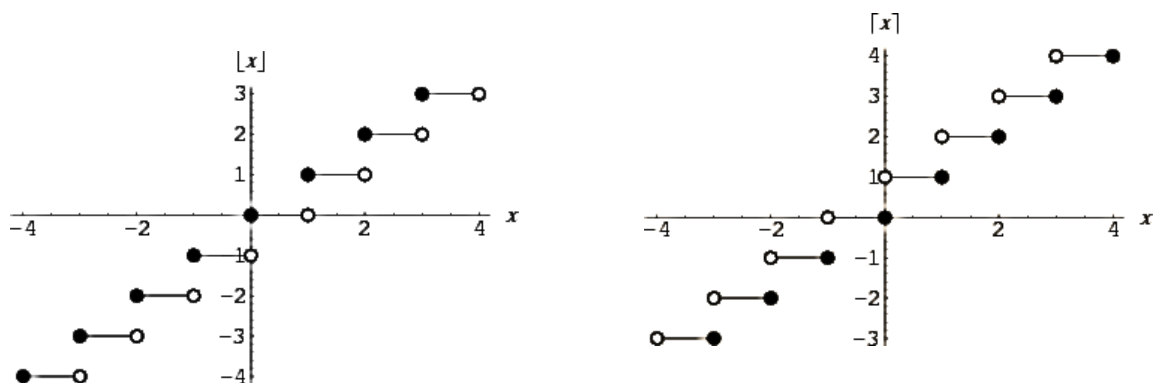
La función “piso” asigna a cada número real x , el mayor entero menor o igual a x . El valor de la función “piso” en x se denota $\lfloor x \rfloor$. La función “piso” algunas veces se conoce como la función parte entera.

La función “techo” asigna a cada número real x , el menor entero mayor o igual a x . El valor de la función “techo” en x se denota por $\lceil x \rceil$.

Ejemplos

- $\lfloor 2 \rfloor = 2$, $\lfloor \frac{1}{2} \rfloor = 0$, $\lfloor \pi \rfloor = 3$, $\lfloor -1,3 \rfloor = -2$.
- $\lceil 8 \rceil = 8$, $\lceil \frac{1}{2} \rceil = 1$, $\lceil \pi \rceil = 4$, $\lceil -1,3 \rceil = -1$.

Al graficar las funciones “piso” y “techo” resulta lo que se muestra seguidamente, donde el punto cerrado significa incluido y el punto abierto, no incluido.



Ejemplo: En un cierto país, el proveedor de internet carga 4 centavos por cada kilobyte o porción de kilobyte de datos que se descargue. El costo, en centavos, de descargar K kilobyte de datos es:

- a) $4K$ b) $4\lfloor K \rfloor$ c) $4(\lfloor K \rfloor - 1)$ d) $4(\lfloor K \rfloor + 1)$ e) $-4\lfloor -K \rfloor$

Solución: Si K es un entero, claramente el cargo será $4K$; pero si K no es entero, el cargo será $4(\lfloor K \rfloor + 1)$. La relación que cumple con las dos condiciones es $-4\lfloor -K \rfloor$.

Ejercicios

Ahora te toca a ti resolver algunos ejercicios:

Ejercicio 1. Si $f(x) = px^7 + qx^3 + rx - 4$ y $f(-7) = 3$, ¿a qué es igual $f(7)$?

- a) 3 b) -3 c) -11 d) 11 e) -7

Ejercicio 2. Si $\sin x = 2 \cos x$, entonces $\sin x \cos x$ es igual a:

- a) $5/2$ b) $2/5$ c) $2/3$ d) $\sqrt{3}/2$ e) $\sqrt{5}/5$

Ejercicio 3. La suma de las soluciones de la ecuación $\sin\left(\frac{x}{2}\right) + \cos\left(\frac{x}{2}\right) = 1$

en el intervalo $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$ es:

- a) 90° b) 180° c) 270° d) 360° e) 540°

Ejercicio 4. Si $x = (\log_2 3)(\log_3 4)(\log_4 5) \cdots (\log_{2006} 2007)$ entonces x satisface:

- a) $x \leq 8$ b) $8 < x \leq 9$ c) $9 < x \leq 10$ d) $10 < x < 11$ e) $x > 11$

Ejercicio 5. Para $x \geq 1$ se define $f(x)$ como el mayor entero positivo n tal que $1 + 2 + 3 + \cdots + n \leq x$. El valor de $f\left(\frac{(2005)^2}{2}\right)$ es:

- a) 2005 b) 2004 c) 2003 d) $(2005)^2$ e) $\frac{(2005)^2}{2}$

Ejercicio 6. Si $\log xy^3 = 1$ y $\log x^2 y = 1$. ¿Cuál es el valor de $\log xy$?

- a) $-\frac{1}{2}$ b) 0 c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{3}{5}$ e) 1

Ejercicio 7. Si $4(\log x)^2 + 9(\log y)^2 = 12(\log x)(\log y)$ entonces:

- a) $x^3 = y^2$ b) $x^2 = y^3$ c) $x = y$ d) $x + y = 1$ e) $2x = 3y$

Ejercicio 8. Si para todo $x > 0$ se tiene que $f(2x) = \frac{2}{2+x}$. ¿Cuál es el valor de $2f(x)$?

Ejercicio 9. Encuentre todos los números positivos x tales que $\{x\}$, $\lfloor x \rfloor$ y x son tres términos consecutivos de alguna progresión geométrica.

Nota: Para un número real x , $\lfloor x \rfloor$ denota al mayor entero que es menor o igual a x ;

$\{x\}$ es la parte decimal de x , que se define $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$.

Ejercicio 10. El producto de las raíces de la ecuación $x^{\log_{100} x} = 100$ es:

- a) 1 b) -1 c) 10 d) 100 e) 10^{-1}

Ejercicio 11. Sea x es un ángulo tal que $\sin x = \sin\left(\frac{x}{2}\right) - \cos\left(\frac{x}{2}\right)$, el valor de $\sin^2 x$ es:

- a) 1 b) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ c) $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ d) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ e) $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$

Ejercicio 12. Si $\sin x + \cos x = 1,2$, entonces $\sin 2x$ es igual a:

- a) 0,88 b) -0,88 c) 0,44 d) -0,44 e) 0,4

Ejercicio 13. Sea x un ángulo, $|\sin^2 x - 2| - |\cos^2 x - 2|$ es igual a:

- a) 1 b) $\sin^2 x$ c) $\cos^2 x$ d) $\sin 2x$ e) $\cos 2x$

Ejercicio 14. Si f es una función real tal que $f(0) = 2$ y $f(x+y) = x + f(y)$, el valor de $f(2009)$ es:

- a) 2009 b) 2010 c) 2011 d) 2012 e) 2008

Ejercicio 15. Si $\log_2(\log_3 N) = 5$, el divisor primo de N es:

- a) 2 b) 3 c) 5 d) 7 e) 11